Analyyttinen mekaniikka 76310A — Syksy 2001

Tentti — 10.12.2001

1. Oletetaan, että Lagrangen funktio riippuu kiihtyvyyksistä eli $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$. Johda variaatioperiaatteesta lähtien liikeyhtälö q:lle. Mitkä ovat järkevät reunaehdot tässä tapauksessa? Kirjoita liikeyhtälö erikoistapauksessa

$$L = -\frac{m}{2} q\ddot{q} - \frac{k}{2} q^2. \tag{1}$$

2. Tarkastellaan heiluria (massa m), joka voi heilahdella vain yhdessä tasossa. Oletetaan että heilurin pituus ei ole vakio, vaan sen (painottomalla) langalla on jousivakio k, ja sen pituus kuormittamattomana on l. Kirjoita Lagrangen funktio. Johda siitä liikeyhtälö. Laske pienten värähtelyjen taajuudet.

3. Tutkitaan symmetristä hyrrää painovoimakentässä:

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} I_1 (\dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\gamma})^2 \\ & - Mgl \cos \beta, \end{aligned} \tag{2}$$

Etsi systeemin liikevakiot. Miksi Hamiltonin funktio tässä tapauksessa on sama kuin kokonaisenergia? Kuvaile (kaavat eivät välttämttömiä) kuinka liike saadaan redusoitua yksiulotteiseksi tehtäväksi.

4. Lähtien Lagrangen funktiosta

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - q\varphi(\mathbf{r}, t) + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \tag{3}$$

johda vastaava Hamiltonin funktio kirjoitettuna oikeiden muuttujiensa funktiona. Kirjoita vastaava Hamiltonin operaattori Schrödingerin kuvassa.

5. Mitä tarkoitetaan Poissonin sulkusuureilla? Osoita että

$$[p_i, A]_{\mathrm{PB}} = -\frac{\partial A}{\partial q_i}. \tag{4}$$

Laske kulmaliikemäärän karteesisten komponettien Poissonin sulkusuure

$$[L_x, L_y]_{\mathrm{PB}}. \tag{5}$$