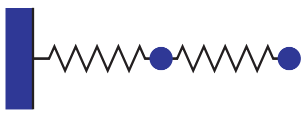
Analyyttinen mekaniikka 763310A
Tentti 9.12.2005

1. a) Osoita lähtien Lagrangen yhtälöistä, että Lagrangen funktioon L_0 voidaan lisätä funktion $f(q_1, \ldots, q_n, t)$ kokonaisaikaderivaatta,
$$L = L_0 + \frac{df}{dt} \tag{1}$$
niin että Lagrangen yhtälöt eivät muutu.
b) Osoita sama lähtien Hamiltonin periaatteesta.

2. Tarkastellaan pistemäisten hiukkasten sirontaa kiinnitetystä kovasta pallosta, jonka säde on R. Laske sironnan differentiaalinen ja kokonaisvaikutusala. Apuna voit käyttää kaavaa
$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|, \tag{2}$$
missä b on sirontaparametri.

3. Tutkitaan hiukkasta (massa m), joka on rajoitettu liikkumaan pallon pinnalla ($r = R$). Painovoimakentässä g sitä kuvaa Lagrangen funktio
$$L = \frac{1}{2}mR^2\left[\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right] - mgR\cos\theta, \tag{3}$$
missä θ ja ϕ ovat hiukkasen polaari- ja atsimuuttikulmat. Miten tämä liikeongelma saadaan redusoitua yksiulotteiseksi liikkeeksi? Kuvaile efektiivinen potentiaali yleisessä tapauksessa ja kuvaile sen pohjalta hiukkasen liike.

4. Tutkitaan kuvan mukaista järjestelmää jossa identtiset massat ovat kiinnitetty toisiinsa ja toinen niistä jäykkään seinään samanlaisilla jousilla. Massat voivat liikkua vain seinää vastaan kohtisuorassa suunnassa. Muodosta Lagrangen funktio ja laske systeemin pienten värähtelyjen taajuudet tasapainotilan ympärillä.



5. Tarkastellaan harmonista oskillaattoria
$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2. \tag{4}$$
a) Kirjoita Hamiltonin funktio ja muodosta Hamiltonin liikeyhtälöt.
b) Piirrä kuva faasiavaruudesta ja kuvaile harmonisen oskillaattorin aikakehitys lähtien alkuarvosta $x(0) = x_0 \neq 0$, $p(0) = 0$.

Täytä kurssipalautelomake.