Analyyttinen mekaniikka 76310A Syksy 2001
Tentti 18.1.2002

1. Massaton venymätön naru kulkee kiinnitetyn väkipyörän yli. Banaanitertu massaltaan m on kiinnitetty narun toiseen päähän A. Apina massaltaan M on aluksi langan toisessa päässä B. Apina kiipeää narua ja sen liikkuma matka $d(t)$ suhteessa narun päähän B on jokin funktio ajan suhteen. Systeemi on aluksi levossa, joten alkuehdot ovat $d(0) = \dot{d}(0) = 0$. Valitse sopivat yleistety koordinaatit ja laske systeemin Lagrangen funktio niissä koordinaaateissa. Osoita että apinan korkeutta Z kuvaava yhtälö on

$$(m + M)\ddot{Z} - m\ddot{d} = (m - M)g. \tag{1}$$

Integroi yhtälö liikkeen ratkaisemiseksi. Erikoistapauksessa $M = m$ osoita, että banaanit ja apina nousevat saman korkeuden siten, että niiden pystysuora etäisyys on vakio.

2. Tutkitaan systeemiä jonka Lagrangen funktio on

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{k}{r}, \tag{2}$$

missä X, Y, Z, r ja ϕ ovat riippumattomia koordinaatteja. Etsi kaikki liikevakiot. Niitä käyttäen redusoi systeemi yksiulotteiseksi ja esitä sen muodollinen ratkaisu. (Integraaleja ei tarvitse laskea.)

3. Lausu Hamiltonin periaate. Johda siitä Lagrangen yhtälöt.

4. Tutkitaan yksinkertaista heiluria (massa m, langan pituus l, heilahtelu yhdessä tasossa). Kirjoita Lagragen funktio. Laske Hamiltonin funktio oikeiden muuttujiensa funktiona. Kirjoita Hamiltonin liikeyhtälöt.

5. Mitä tarkoitetaan Poissonin sulkusuureilla? Osoita että

$$[p_i, A]_{\mathrm{PB}} = -\frac{\partial A}{\partial q_i}. \tag{3}$$

Laske kulmaliikemäärän karteesisten komponettien Poissonin sulkusuure

$$[L_x, L_y]_{\mathrm{PB}}. \tag{4}$$