Analyyttinen mekaniikka 763310A
Tentti 17.1.2003

1. Vaaditaan että integraalilla

$$I = \int_0^\infty \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - y^2 + \frac{1}{2} y^4 \right] dx \tag{1}$$

on ääriarvo reunaehdoilla $y(0) = 0$, $y(\infty) = 1$. Minkä differentiaaliyhtälön $y(x)$ toteuttaa?

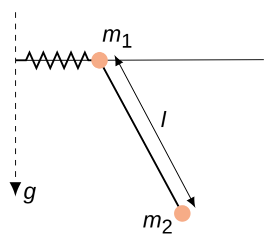
2. Tarkastellaan keskeispotentiaalissa olevaa hiukkasta. Miksi voidaan rajoittua tutkimaan tasoliikettä? Kirjoita tasoliikkeen Lagrangen funktio. Laske systeemin liikevakiot.

3. Massaton venymätön naru kulkee kiinnitetyn väkipyörän yli. Banaaniterttu massaltaan m on kiinnitetty narun toiseen päähän A. Apina massaltaan M on aluksi langan toisessa päässä B. Apina kiipeää narua ja sen liikkuma matka $d(t)$ suhteessa narun päähän B on jokin funktio ajan suhteen. Systeemi on aluksi levossa, joten alkuehdot ovat $d(0) = \dot{d}(0) = 0$. Valitse sopivat yleistetyt koordinaatit ja laske systeemin Lagrangen funktio niissä koordinaateissa. Osoita että apinan korkeutta Z kuvaava yhtälö on

$$(m + M)\ddot{Z} - m\ddot{d} = (m - M)g. \tag{2}$$

Integroi yhtälö liikkeen ratkaisemiseksi. Erikoistapauksessa $M = m$ osoita, että banaanit ja apina nousevat saman korkeuden siten, että niiden pystysuora etäisyys on vakio.

4. Tutkitaan kuvan mukaista tasossa olevaa systeemiä jossa painovoima vaikuttaa alaspäin. Massa m_1 voi liikkua vain vaakasuorassa suunnassa ja on kiinnitetty kiinteään pisteeseen jousella jonka jousivakio on k. Massa m_2 on kiinnitetty massaan m_1 massattomalla sauvalla (pituus l) joka pääsee kiertymään m_1:n ympäri. Muodosta Lagrangen funktio ja laske systeemin pienten värähtelyjen taajuudet.



5. Lähtien Lagrangen funktiosta

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - q\varphi(\mathbf{r}, t) + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \tag{3}$$

johda vastaava Hamiltonin funktio kirjoitettuna oikeiden muuttujiensa funktiona. Kirjoita vastaava Hamiltonin operaattori Schrödingerin kuvassa.