Harjoitus 5

1. Lue 1.5.2-3 ja 1.6.2. Tutustu funktioihin `D`, `Dt`, `Integrate` ja `NIntegrate`.

2. Olkoon $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Taulukoi funktion arvot pisteissä $a \leq x_i \leq 2$, $i = 1, \ldots, n$, missä $a = 0.5 \ldots 0.01$, ja $n = 10 \ldots 50$ (valitse siis mielesi mukaan jotkut arvot näiltä väleiltä). Laske funktion derivaatan arvot $f'(x_i)$ ja $f''(x_i)$, $i = 2, \ldots, n-1$, Taylorin sarjasta johdetuilla kaavoilla (ks. luennot).

3. Radioaktiivista hajoamista kuvaa differentiaaliyhtälö

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t),$$

missä $N(t)$ on radioaktiivisten ydinten lukumäärä hetkellä t ja λ on hajoamisvakio, $\lambda = (\ln 2)/T_{1/2}$, missä $T_{1/2}$ on puoliintumisaika. Olkoot $\lambda = 0.1\,\mathrm{s}^{-1}$ ja $N(0) = 10^{25}$. Sijoita yo. yhtälöön derivaatan dN/dt approksimaatio

$$N'(t_i) = \frac{N_{i+1} - N_i}{h}$$

ja ratkaise siitä N_{i+1} N_i:n funktiona – $t_{i+1} - t_i = h$ ja h voi saada arvoja $h = 10^{-4} \ldots 0.1$. Ratkaise siis funktion N arvot hetkillä t_i, $i = 2, \ldots, n$ ($N(t_1) = N(0)$) johonkin (suurehkoon) n:n arvoon asti ja piirrä niistä kuvaaja. Vertaa kuvaajaa tarkkaan ratkaisuun $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$.

4. Ajan funktiona muuttuvalla kiihtyvyydellä $g(t)$ liikkuvan kappaleen liikeyhtälö on

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = g(t),$$

josta

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v(0) + \int_0^t a(t')dt',$$

ja edelleen

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t')dt'.$$

Olkoon $g(t) = ct$, missä $c = 0.1\,\mathrm{ms}^{-3}$, ja alkuehdot $x(0) = 0$, $v(0) = 1\,\mathrm{ms}^{-1}$. Merkitään $t_i = (i-1)h$, $i = 1, \ldots, n$, missä $h = 0.01\,\mathrm{s}$. Laske kappaleen paikka ajanhetkillä t_i laskemalla ensin kappaleen nopeuden hetkillä t_j, $j = 1, \ldots, i$. Tee tehtävä ensin Mathematican valmiilla funktiolla `Integrate`, ja myös approksimoimalla integraaleja puolisuunnikassäännöllä.