

763315A ATK II – NUMEERINEN MALLINTAMINEN

Koe 28.3.2008

Kokeen laatija: Jussi Mattas

1. Miten suoritat seuraavat toiminnot *Mathematicassa*?

- ratkaiset epälineaarisen differentiaaliyhtälön
- luot taulukon pisteistä x_j , missä $j = 1, \dots, n$, niin että $x_1 = 0$ ja $x_n = 2\pi$
- ratkaiset numeerisesti ei-algebrallisen yhtälön
- etsit funktion ääriarvon
- luet lukupareja (x, y) tiedostosta ja hahmottelet näistä käyrän $y(x)$ kuvaajan
- sovitat mittaustuloksiin suoran pienimmän neliösumman menetelmällä

2. Vastaa seuraaviin kysymyksiin viittaamatta *Mathematican* syntaksiin.

- Mitä tarkoittaa interpolaatio? Etsi jokin fysikaalinen esimerkki tilanteesta, jossa interpolaatiota tarvittaisiin.
- Esitä eri tapoja suorittaa interpolaatio, ja pohdi niiden vahvuuksia ja heikkouksia.

3. Mitä seuraavassa Mathematica-koodinpätkässä tehdään? Minkä lausekkeen funktio p laskee? Erityisesti, mitä on $p[x[k]]$, kun k on kokonaisluku ykkösen ja n :n väliltä?

```
i = 0; n = 20;
Do[Clear[x]; x[1] = 0; x[n] = 3 π; h =  $\frac{x[n] - x[1]}{n - 1}$ ;
Do[x[i] = x[1] + (i - 1) h, {i, 2, n - 1}];
p[y_] := Module[{i, j, summa, tulo},
  For[i = 1; summa = 0, i ≤ n, i++,
  For[j = 1; tulo = 1, j ≤ n, j++,
  If[j ≠ i, tulo *=  $\frac{y - x[j]}{x[i] - x[j]}$ ]];
  summa += f[x[i]] * tulo; summa];
g[n] = Plot[Evaluate[p[y]], {y, 0, 3 π}, PlotRange → {-π, 4 π},
  PlotStyle → {Hue[ $\frac{i}{10}$ ]}];
{n, {2, 5, 10, 20, 50}}
```

KÄÄNNÄ!

4. Tarkastellaan toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä, jolla on ominaisarvo. Oletetaan lisäksi reunaehdot, joista määräytyy funktion ja sen derivaatan arvo kahdessa eri pisteessä. Miten ratkaistais tällaisen probleeman numeerisesti? Perustele ratkaisualgoritmi eri vaiheet. Selitä, miksi algoritmi on "hyvä".
5. Olkoon $\{x_i : i = 1, \dots, n\}$ tasavälinen joukko pisteitä ($x_{i+1} - x_i = h$) ja merk. $f_i \equiv f(x_i)$.

a) Lähtien funktion f Taylorin sarjasta

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i,$$

johda likimääräiset lausekkeet $f'(x_i)$:lle ja $f''(x_i)$:lle, $i = 1, \dots, n$, funktion arvojen f_i ja $f_{i\pm 1}$ avulla, kun $i = 1, \dots, n$. Reunaehtoina voit olettaa $f(x_1 - h) = f(x_n + h) = 0$.

b) Sijoita a-kohdassa muodostamasi derivaattojen lausekkeet differentiaaliyhtälöön

$$-f''(x) + \frac{1}{2}x^2 f'(x) = f(x),$$

ja muodosta lineaarinen yhtälöryhmä (n kpl yhtälöitä) muuttujille f_i .

c) Miten ratkaistais b-kohdassa muodostamasi yhtälöryhmän? Miten saat tästä ratkaistusta funktion f kuvaajan? Esitä tarvittavat Mathematica-komennot ja kuvaile, mitä ne antavat tulokseksi.