

## 763315A ATK II – NUMEERINEN MALLINTAMINEN

Koe 9.5.2008

Kokeen laatija: Jussi Mattas

1. Kerro lyhyesti, miten suoritat seuraavat toiminnot *Mathematicassa*.
  - a) Luet lukupareja  $(x, y)$  tiedostosta ja hahmottelet näistä funktion  $y(x)$  kuvaajan.
  - b) Sovitat datapisteisiin paraabelin pienimmän neliösumman menetelmällä.
  - c) Ratkaiset numeerisesti ei-algebrallisen yhtälön.
  - d) Lasket kappaleen paikan  $x(t)$  ajan funktiona, kun nopeus  $v(t)$  ajan funktiona ja lähtöpaikka  $x(t_0)$  on annettu.
  - e) Luot taulukon tasavälisistä pisteistä  $x_j$ , missä  $j = 1, \dots, n$  ( $n$  annettu), niin että  $x_1 = 0$  ja  $x_n = 2\pi$ .
  - f) Ratkaiset numeerisesti differentiaaliyhtälön ja piirät ratkaisufunktion kuvaajan.
2. Vastaa seuraaviin kysymyksiin **viittaamatta Mathematican syntaksiin**:
  - a) Mitä tarkoittaa interpolaatio? Keksi esimerkki laskennallisesta ongelmasta, jossa voidaan tarvita interpolaatiota.
  - b) Esitä eri tapoja suorittaa interpolaatio ja pohdi niiden vahvuuksia ja heikkouksia.
3. Mitä seuraavassa *Mathematica*-koodinpätkässä tehdään? Millainen funktio  $k$  on? Olkoon  $f(x) = x^2$  ja  $n = 5$ . Piirrä funktioiden  $f$  ja  $k$  kuvaajat samaan kuvaan, kun  $0 < x < 2$ .

```
In[16]:= t[1] = 0; t[n] = 2; h =  $\frac{t[n] - t[1]}{n - 1}$ ;
Do[t[i] = t[1] + (i - 1) h, {i, 2, n - 1}];
k[x_] :=
(
For[i = 0; kx = 0, i ≤ n, i++,
If[x ≥ t[i] && x ≤ t[i + 1],
kx =  $\frac{f[t[i + 1]] - f[t[i]]}{h} (x - t[i]) + f[t[i]]$ ;
Break[]]
]; kx)
```

**KÄÄNNÄ!**

4. Tarkastellaan toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä, jolla on ominaisarvo. Anna esimerkki tällaisesta yhtälöstä. Oletetaan lisäksi reunaehdot, joista määräytyy ratkaisufunktion ja sen derivaatan arvo kahdessa eri pisteessä. Miten ratkaiseta tällaisen ongelman numeerisesti? Perustele ratkaisualgoritmissi eri vaiheet. Selitä, miksi algoritmissi on "hyvä".
5. Olkoon  $\{x_i : i = 1, \dots, n\}$  tasavälinen joukko pisteitä ( $x_{i+1} - x_i = h$ ) ja merk.  $f_i \equiv f(x_i)$ .

a) Lähtien funktion  $f$  Taylorin sarjasta

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i,$$

johda likimääräiset lausekkeet  $f'(x_i)$ :lle ja  $f''(x_i)$ :lle,  $i = 1, \dots, n$ , funktion arvojen  $f_i$  ja  $f_{i\pm 1}$  avulla, kun  $i = 1, \dots, n$ . Reunaehtoina voit olettaa  $f(x_1 - h) = f(x_n + h) = 0$ .

b) Sijoita a-kohdassa muodostamasi derivaattojen lausekkeet differentiaaliyhtälöön

$$-xf''(x) + \frac{1}{2x}f'(x) = 2f(x),$$

ja muodosta lineaarinen yhtälöryhmä ( $n$  kpl yhtälöitä) muuttujille  $f_i$ .

c) Miten ratkaiseta b-kohdassa muodostamasi yhtälöryhmän? Miten saat tästä ratkaistusta funktion  $f$  kuvaajan? Esitä tarvittavat Mathematica-komennot ja kuvaile, mitä ne antavat tulokseksi.