763315A ATK II – NUMEERINEN MALLINTAMINEN

Koe 10.10.2008

Kokeen laatija: Jussi Mattas

Tentin maksimipistemäärä on 33. Näistä kolme ovat bonuspisteitä.

1. (6p.) Kerro lyhyesti, miten suoritat seuraavat toimenpiteet *Mathematicassa*:
   - Luet tiedostosta lukupareja (x, y) ja hahmottelet niistä funktion $y(x)$ kuvaajan.
   - Sovitat datapisteisiin kolmannen asteen polynomin pienimmän neliösumman menetelmällä.
   - Luot taulukon tasavälisistä pisteistä x_i, missä $j = i, \ldots, n$, niin että $x_1 = 0$ ja $x_n = 1$.
   - Ratkaiset numeerisesti epälineaarisen differentiaaliyhtälön ja piirrät ratkaisufunktion kuvaajan.
   - Lasket kappaleen paikan $x(t)$ ajan funktiona, kun kiihtyvyys $a(t)$ ajan funktiona sekä lähtönopeus $v(t_0)$ ja lähtöpaikka $x(t_0)$ on annettu.
   - Etsit yhtälölle $\tan x^2 = x$ numeerisesti pisteen $x = 1$ lähistöllä olevan ratkaisun.

2. (6p.) Selitä *välinpuolitusmenetelmä* yhtälön numeeriseksi ratkaisemiseksi. Löytääkö menetelmä aina yhtälön ratkaisun? Mistä tekijöistä menetelmän nopeus (ts. kuinka monta iteraatioaskelta vaaditaan halutun tarkkuuden saavuttamiseksi) riippuu?

3. (6p.) Mitä seuraavassa *Mathematica*-koodinpätkässä tehdään (oleta, että funktio f ja luku n on annettu aiemmin)? Millainen funktio k on? Olkoon $f(x) = \sin x$ ja $n = 5$. Piirrä funktioiden f ja k kuvaajat samaan kuvaan, kun $0 < x < 2\pi$ (älä esitä *Mathematica*-komentoja vaan *piirrä* vastauspaperille).

```
In[9]:= t[1] = 0; t[n] = 2 π; h = (t[n] - t[1]) / (n - 1);
        Do[t[i] = t[1] + (i - 1) h, {i, 2, n - 1}];
        k[x_] :=
         (For[i = 1; kx = 0, i ≤ n, i++,
           If[x ≥ t[i] && x ≤ t[i + 1],
            kx = (f[t[i + 1]] - f[t[i]]) / h * (x - t[i]) + f[t[i]];
            Break[]]
          ]; kx)
```

KÄÄNNÄ!

4. (6p.) Tarkastellaan toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä, jolla on ominaisarvo. Anna esimerkki tällaisesta yhtälöstä. Oletetaan lisäksi reunaehdot, joista määräytyy ratkaisufunktion ja sen derivaatan arvo kahdessa eri pisteessä. Miten ratkaiset tällaisen ongelman numeerisesti? Selitä algoritmi (differenssimenetelmää ei tarvitse selittää) ja perustele sen eri vaiheet. Selitä myös, miksi algoritmisi on "hyvä".

5. (9p.) Tutkitaan joukkoa lukupareja (X_i, Y_i), $i = 1, \ldots, n$, missä pisteet X_i ovat tasavälisiä, $X_{i+1} - X_i = h$. Nämä lukuparit kuvaavat jotain funktiota $Y(X)$. Oletetaan, että lukuparien tulisi toteuttaa differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^2y}{dx^2} + c\frac{dy}{dx} + xy = 0, \tag{1}$$

missä c on jokin säädettävä parametri. Toteutetaan differentiaaliyhtälön sovitus datapisteisiin seuraavasti: Oletetaan reunaehdot $y(X_1) = Y_1$ ja $y'(X_1) = (Y_2 - Y_1)/h$. Arvataan parametrille c jokin arvo ja ratkaistaan $y(X_i)$, $i = 2, \ldots, n$, yhtälöstä (1) ja em. reunaehdoista. Verrataan ratkaisuprosessin antamaa arvoa $y(X_n)$ arvoon Y_n. Jos nämä eivät ole tarpeeksi lähellä toisiaan, arvataan c:lle uusi arvo ja toistetaan ratkaisuprosessi. Tätä jatketaan kunnes on löydetty sellainen c:n arvo, että $y(X_n) \approx Y_n$ halutun tarkkuuden rajoissa. Arvioidaan lopuksi virhettä laskemalla integraali

$$\int_{X_1}^{X_n} |y(x) - Y(x)|\, dx, \tag{2}$$

missä y on em. ratkaisuprosessin tuottama yhtälön (1) ratkaisufunktio.

a) Kirjoita yhtälöä (1) vastaava *differenssiyhtälö*. Miten tästä ratkaistaan $y(X_i)$? Huomioi reunaehdot!

b) Oletetaan, että parametrin c arvo halutaan selvittää sellaisella tarkkuudella, että $|y(X_n) - Y_n| < \varepsilon$, missä ε on jokin annettu luku. Esitä algoritmi c:n arvon määrittämiseksi.

c) Approksimoi integraalia (2) *puolisuunnikassäännöllä*. Esitä lisäksi *Mathematica*-komennot, joilla lasket integraalin arvon.