763101P FYSIIKAN MATEMATIIKKAA
Kertaustehtäviä 1. välikokeeseen, sl 2008

Näitä laskuja ei lasketa laskupäivissä eikä näistä saa laskuharjoituspisteitä. Laskut on tarkoitettu laskettaviksi alkutuutorointiryhmissä, itsekseen, kaveriporukalla tai Fysiikan tuutortuvassa. Laskujen ratkaisuja ei tule nettiin, mutta lopputulokset ovat materiaalin lopussa.

PERUSTEHTÄVIÄ
(Nämä asiat on hallittava ennen kuin osaa ratkaista tenttitehtäviä.)

1. Derivoi seuraavat funktiot:

a) $f(x) = 2x^5 + 5x^2 - 3$ b) $f(x) = \dfrac{1}{4x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{5x}$ d) $f(x) = x^4(x-1)$

e) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ f) $f(\alpha) = \tan(k\alpha)$, missä k on vakio

g) $f(x) = e^{2x-1}$ h) $f(x) = \ln(x^2+2)$

i) $f(y) = \arcsin\left[\dfrac{2y}{y^2-1}\right]$ j) $f(x) = e^{e^{x^2}}$

2. Määritä integraalifunktiot:

a) $\int (2x^5 + 5x^2 - 3)dx$ b) $\int \dfrac{dx}{4x^2}$

c) $\int (\sqrt{5x})dx$ d) $\int \sin(2x)dx$

e) $\int \sin x \cos x dx$ f) $\int \dfrac{2x}{x^2-1}dx$

g) $\int e^{2x-1}dx$ h) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x+2}}$

i) $\int \dfrac{dx}{1+x^2}$ j) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

3. Vektorit $\overline{A}$ ja $\overline{B}$ määritellään seuraavasti: $\overline{A} = 3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$ ja $\overline{B} = \hat{i} - 2\hat{j}$. Laske

a) $\overline{A} - \overline{B}$

b) $|\overline{A}| + |\overline{B}|$

c) $\overline{A} \cdot \overline{B}$

d) $\overline{A} \times \overline{B}$

e) vektoreiden $\overline{A}$ ja $\overline{B}$ välinen kulma.

4. Sievennä:

a) i^4 b) $(2+3i)(3-i)$ c) $\dfrac{5-2i}{1-i}$

LASKUHARJOITUSTYYPPISIÄ TEHTÄVIÄ

5. Laske seuraavien funktioiden derivaatta lähtien derivaatan määritelmästä:

a) $f(x) = 2x^2$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ c) $f(x) = \cos x$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

6. Etsi funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 10$ paikalliset minimi- ja maksimiarvot.

7. Kahden positiivisen luvun summa on 10. Mikä on pienin mahdollinen arvo ensimmäisen luvun kuution ja toisen luvun neliön summalle?

8. Etsi käyrän $y = e^x - 2x + 1$ tangentin kulmakerroin pisteessä $x = 0$. Mikä on tangentin yhtälö?

9. Sovella l'Hôpitalin sääntöä ja laske seuraavat raja-arvot:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$ c) $\lim\limits_{t\to\pi} \dfrac{\sin^2 t}{t-\pi}$

10. Muodosta implisiittisesti *dy/dx* yhtälöistä

a) $x^3 + y^3 = 1$ b) $y\sin x = x^3 + \cos y$ c) $x\sqrt{x+y} = 8 - xy$

11. Laske $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ kun

a) $f(x,y,z) = (x+1)e^{y+z}$ b) $f(x,y,z) = \dfrac{2x(y^2+1)}{z^2 - y^2}$

12. Muodosta kokonaisdifferentiaalin lauseke *df*, kun $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

13. Laske integraalifunktiot

a) $\int x\cos x dx$ b) $\int x^3 \ln x dx$ c)* $\int x^2 e^x dx$

14. Laske integraalifunktiot

a) $\int \frac{x^3+3x^2}{x^2+1}dx$ b) $\int \frac{x}{2x-1}dx$ c)* $\int \frac{3x-1}{x^2-1}dx$

15. Laske integraalifunktiot:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ Vihje: Kokeile sijoitusta $t = x - 1$.

b) $\int e^x \sqrt{1+e^x}\,dx$ Vihje: Kokeile sijoitusta $t = 1 + e^x$.

16. Laske määrätyt integraalit:

a) $\int_0^{\pi a/4} \frac{dx}{a^2+x^2}$

b) $\int_0^T \frac{1}{T}\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt$ Vihje: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ (Tämä annetaan siinä kaavakokoelmassa, joka jaetaan tentissä.)

c) $\int_{-a}^{+a} \frac{\sin x}{x^2}dx$ Vihje: Tuloksen näet integroimatta.

17. Suora kulkee pisteiden (0,0,0) ja (2,5,6) kautta.
a) Määritä vektorin $3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ projektio tällä suoralla.
b) Määritä suoran suuntainen yksikkövektori.

18. Suora kulkee pisteiden (0,0,0) ja (2,5,6) kautta. Mikä on pisteen (3,3,3) lyhin etäisyys tästä suorasta?

19. Kehitä Taylorin sarjaksi seuraavat funktiot ja laske suppenemissäteet:

a) e^{2x+1} b) $x\sin x$ c) $\ln(2+x)$

20. Mitkä ovat seuraavien lukujen napakoordinaattiesitykset

a) $3-3i$ b) $-1+\sqrt{2}i$ c) $6i$

21. Kirjoita luku $\dfrac{\left(5e^{i\phi}\right)^2\left(e^{i\theta}\right)^3}{e^{i(\phi+\theta)}}$ reaali- ja imaginääriosien avulla, kun $\phi = 15^0$ ja $\theta = 15^0$.

Huomaa: Tehtävä 22 puuttuu!

VANHOJA TENTTITEHTÄVIÄ, OSA TAVALLISTA VAIKEAMPIA

23. Määrää raja-arvo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x\sin x}$.

24. Laske raja-arvo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(1+x)}{x^2}$

25. Muodosta funktion

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

kokonaisdifferentiaali *df*. Laske myös toisen kertaluvun osittaisderivaattojen summa $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}$.

26. Laske funktion

$$f(x,y) = xe^{y+x^2}$$

kaikki osittaisderivaatat toiseen kertalukuun saakka. Määrää myös kokonaisdifferentiaali *df*.

27. Tarkastellaan funktiota $f(x,y) = \sin(xy) + y - x + \dfrac{\pi}{2}$. Muodosta funktion kokonaisdifferentiaali df.

28. Tarkastellaan funktiota $f(x,y) = \sin(xy) + y - x + \dfrac{\pi}{2}$. Yhtälö $f(x,y) = 0$ määrää muuttujan y implisiittisesti muuttujan x funktiona. Mikä on tämän käyrän $y = y(x)$ derivaatta dy/dx eli tangentin kulmakerroin pisteessä, jossa se leikkaa y-akselin? (voit käyttää monisteessa esitettyä derivaatan muodostamistapaa tai derivoida suoraan muistaen, että $y = y(x)$.)

29. Millä vakion a arvolla integraali $\int_a^{a+1} (x^2 + x + 1)dx$ aa pienimmän arvonsa?

30. Laske integraalit: a) $\int_0^3 \sqrt{x+1}dx$ b) $\int e^x \sin x dx$

31. Kolmion kärkipisteet ovat (3, -1, 2), (1, -1, -3) ja (4, -3,1). Mikä on kolmion pinta-ala?

32. Määrää pisteen (0,2,-3) kautta kulkevan ja vektoria $4\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ vastaan kohtisuorassa olevan tason yhtälö.

33. Määrää funktion $f(x) = 6\sin x - 6x + x^3$ Taylorin sarja.

34. Kehitä Taylorin sarjaksi $\sum_n a_n x^n$ funktio $x^2 \sin\left(\frac{x}{3}\right)$. (*Vihje:* Käytä hyväksi kaavakokoelmassa annettua funktion sin x annettua sarjakehitelmää.) Määrää myös suppenemissäde.

35. Etsi funktion e^{3x+1} Taylorin sarja muodossa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ origon ympäristössä. Mikä on sarjan suppenemissäde?

36. Planckin säteilylaki antaa mustan kappaleen säteilemän sähkömagneettisen säteilyn kunkin taajuuden ν intensiteetin I tietyssä lämpötilassa T,

$$I_T(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}.$$

Tässä h, c ka k_B ovat luonnonvakioita. Osoita, että säteilykvantin energian $h\nu$ ollessa paljon lämpöenergiaa $k_B T$ pienempi ($h\nu << k_B T$), on intensiteetti annetussa lämpötilassa approksimatiivisesti verrannollinen taajuuden neliöön, $I_T \propto \nu^2$. (Rohkaisu: tehtävä on helpompi kuin miltä vaikuttaa, yksi välivaihe riittää! Kokeile rohkeasti eri lähestymistapoja.)

VASTAUKSET FYSIIKAN MATEMATIIKAN 1. KERTAUSHARJOITUKSIIN

1.a) $10x^4 + 10x$ b) $-\frac{1}{2x^3}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}}$ d) $5x^4 - 4x^3$ e) $\frac{2}{(x+1)^2}$

f) $\frac{k}{\cos^2 k\alpha}$ g) $2e^{2x-1}$ h) $\frac{2x}{x^2+2}$ i) $-\frac{2y^2+2}{(y^2-1)^2\sqrt{1-\left(\frac{2y}{y^2-1}\right)^2}}$

j) $e^{e^{x^2}} e^{x^2} 2x$

2. a) $\frac{1}{3}x^6 + \frac{5}{3}x^3 - 3x + C$ b) $-\frac{1}{4x} + C$ c) $\frac{2\sqrt{5}}{3}\sqrt{x^3} + C$

d) $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$ e) $\frac{1}{2}\sin^2 x + C$ f) $\ln\left|x^2 - 1\right| + C$ g) $\frac{1}{2}e^{2x-1} + C$

h) $2\sqrt{x+2} + C$ i) $\arctan x + C$ j) $\arcsin x + C$

3. a) $2\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k}$ b) $\sqrt{38} + \sqrt{5}$ c) -7 d) $4\hat{i} + 2\hat{j} - 11\hat{k}$ e) 120,5°

4. a) 1 b) 9 + 7*i* c) $\frac{7}{2} - \frac{3}{2}i$

5. a) $4x$ b) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ c) $-\sin x$ d) $-\frac{1}{x^2}$

6. Paikallinen maksimi kohdassa $x = -1 \Rightarrow f(-1) = -10$

Paikallinen minimi kohdassa $x = -\frac{1}{3} \Rightarrow f(-\frac{1}{3}) = -10\frac{4}{27}$

7. 71,4

8. Kulmakerroin: -1 Tangentin yhtälö: $y = -x + 2$

9. a) 0 b) $\frac{1}{6}$ c) 0

10. a) $-\frac{x^2}{y^2}$ b) $\frac{3x^2 - y\cos x}{\sin x - \sin y}$ c) $-\frac{3x + 2y + 2y\sqrt{x+y}}{x + 2x\sqrt{x+y}}$

11. a) $2(x+1)e^{y+z}$ b) $\frac{4x(y^4 + 4y^2 + 6y^2z^2 + 4z^2 + z^4)}{(z^2 - y^2)^3}$

12. $2xdx + 2ydy + 2zdz$

13. a) $x\sin x + \cos x + C$ b) $\dfrac{x^4}{4}\ln x - \dfrac{x^4}{16} + C$ c) $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

14. a) $\dfrac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 3\arctan x + C$ b) $\dfrac{x}{2} + \frac{1}{4}\ln|2x-1| + C$

c) $2\ln|x+1| + \ln|x-1| + C$

15. a) $\arcsin(x-1) + C$ b) $\frac{2}{3}(1+e^x)^{\frac{3}{2}} + C$

16. a) $\dfrac{1}{a}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 0

17. a) $\dfrac{7}{\sqrt{65}}$ b) $\pm\dfrac{2\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k}}{\sqrt{65}}$

18. 1,9

19. a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n e x^n}{n!}$ $R=\infty$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}$ $R=\infty$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(1+x)^n}{n}$ Sarja suppenee, kun -2 $< x <$ 0

20. a) $3\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right]$ b) $\sqrt{3}\left[\cos 54.7^0 - i\sin 54.7^0\right]$ c) $i6\sin\frac{\pi}{2}$

21. $\dfrac{25\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{25\sqrt{2}}{2}$

23. 0

24. ½

25. $-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}dx - y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}dy - z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}dz$

$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$

26. $\left((1+2x^2)e^{y+x^2}\right)dx + \left(xe^{y+x^2}\right)dy$

27. $(y\cos xy - 1)dx + (x\cos xy + 1)dy$

28. - $\dfrac{y\cos xy - 1}{x\cos xy + 1}$

29. a = -1

30 a) $\dfrac{14}{3}$ b) $\frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C$

31. $\dfrac{\sqrt{165}}{2}$

32. $4x - y - 2z - 4 = 0$

33. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{6x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

34. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+3}}{3^{2n+1}(2n+1)!}$ $R = \infty$

35. $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{3^n e x^n}{n!}$ $R = \infty$

36. $I_T(\nu) = \dfrac{8\pi h k_B T}{c^2 h} \nu^2$