

763101P FYSIIKAN MATEMATIIKKA

Kertaustehtäviä 2. välikokeeseen, sl 2008

Näitä laskuja ei lasketa laskupäivissä eikä näistä saa laskuharjoituspisteitä. Laskut on tarkoitettu laskettaviksi itsekseen, kaveriporukalla tai Fysiikan tuutortuvassa. Laskujen ratkaisuja ei tule nettiin, mutta lopputulokset ovat materiaalin lopussa.

LASKUHARJOITUSTYYPPIÄ TEHTÄVIÄ

0. Etsi juuret $(-16)^{\frac{1}{4}}$.

1. Osoita, että annetut funktiot ovat seuraavien differentiaaliyhtälöiden ratkaisufunktioita:

a) $y' + 4y = 8x$ $y = Ce^{-4x} + 2x - \frac{1}{2}$

b) $y'' + 9y = 0$ $y = A \cos 3x + B \sin 3x$

c) $y'' - 2y' + 2y = 0$ $y = e^x (A \cos x + B \sin x)$

2. Ratkaise differentiaaliyhtälöt:

a) $y' = e^{-2x}$ b) $y' = -\cos \frac{1}{2}x$

3. Mitkä seuraavista differentiaaliyhtälöistä ovat separoituvia, eksakteja ja/tai lineaarisia:

a) $y' + (x+1)y^3 = 0$ b) $2y + xy' = 0$ c) $y' = y \cot x$

d) $y' = \cos x \tan y$ e) $y' = \frac{2y}{x} + x^2 e^x$ f) $1 + xy + x^2 y' = 0$

g) $yy' = \frac{1}{2} \sin^2 kx$

4. Ratkaise seuraavat separoituvat differentiaaliyhtälöt:

a) $y' = e^{2x} \cos^2 y$

b) $y' = \frac{y}{x \ln x}$

c) $y' = x^2 y^2 - 2y^2 + x^2 - 2$

5. Osoita, että seuraavat differentiaaliyhtälöt ovat eksakteja ja ratkaise ne:

a) $ydx + xdy = 0$

b) $e^{-\theta} dr - re^{-\theta} d\theta = 0$

c) $(2x + e^y)dx + xe^y dy = 0$

6. Ratkaise seuraavat lineaariset differentiaaliyhtälöt:

- a) $y' - 2xy = 0$
- b) $xy' + 2y = 9x$
- c) $xy' - 2y = x^3 e^x$

7. Ratkaise seuraavat alkuarvotehtävät:

- a) $yy' + x = 0$ $y(0) = -2$
- b) $(y-1)dx + (x-3)dy = 0$ $y(0) = \frac{2}{3}$
- c) $y' + ky = e^{-kx}$ $y(0) = 0.7$

8. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt:

- a) $y'' + 10y' + 25y = 0$
- b) 2.3.-11 $y'' + 2y = 0$
- c) $y'' + 2y' + (\omega^2 + 1)y = 0$, missä ω on vakio

9. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt:

- a) $y'' + y = 3x^2$
- b) $y'' - 4y' + 3y = 2 \sin x - 4 \cos x$
- c) $y'' - y' - 2y = e^x + x$

10. Kappaleen paikka ajan funktiona on $\vec{r} = (2t^3 - 5t^2 + 3t)\hat{i} + (4t + 2)\hat{j}$. Määritä nopeus ja kiihtyvyys ajan funktiona. Määritä kappaleen paikka, nopeus ja kiihtyvyys, kun $t = 5$.

11. Olkoon $f = x^2 + 3y - z^3$ ja $\vec{F} = 2x\hat{i} + 3y\hat{j}$. Laske, mikäli mahdollista:

- a) ∇f b) $\nabla \vec{F}$ c) $\nabla \cdot f$ d) $\nabla \cdot \vec{F}$ e) $\nabla \times f$ f) $\nabla \times \vec{F}$

(Tämä tehtävä on ollut useita kertoja Sähkömagnetismi(TTK)-kurssin loppukoe kysymyksenä)

12. Kappaleen radiusvektori on $\vec{r}(t) = [(v_0 \cos \alpha)t]\hat{i} + [(v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2]\hat{j}$. Laske

kappaleen hetkellinen nopeus $\dot{\vec{r}}$ ja hetkellinen kiihtyvyys $\ddot{\vec{r}}$.

13. Kappaleeseen kohdistuu voima $\vec{F} = (xy - x^2)\hat{i} + 3xy\hat{j}$. Tutki, onko voima konservatiivinen eli onko $\nabla \times \vec{F} = 0$.

14. Kappaleen potentiaalienergia voimakentässä on muotoa $U = ax^2 + by$. Määritä tämän kentän kappaleeseen aiheuttama voima $\vec{F} = -\nabla U$.

15. Määrä yksikkötangentti, päänormaali ja kaarevuussäde käyrälle $\vec{r} = x\hat{i} + x^2\hat{j}$ pisteessä $x = \sqrt{2}$

16. Kappale liikkuu pitkin rataa, jolla kappaleen radiusvektori on $\vec{r} = (R \sin \omega t)\hat{i} + (R \cos \omega t)\hat{j}$. Laske kappaleen aikavälillä $0 \leq t \leq \frac{T}{4}$ kulkema matka, kun $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

VANHOJA VÄLIKOEKYSYMYKSIÄ

17. Ratkaise alkuarvottehtävä

$$y'' - 4y' - 5y = 0 \quad y(-1) = 3 \quad \text{ja} \quad y'(-1) = 9.$$

18. Hiukkanen liikkuu pitkin käyrää $\vec{r} = (t^3 - 4t)\hat{i} + (t^2 + 4t)\hat{j} + (8t^2 - 3t^3)\hat{k}$, kun t on aika. Mikä on hiukkasen kiihtyvyys hetkellä $t = 2$? Mikä on tällä samalla hetkellä kiihtyvyyden projektio liikkeen tangentin suuntaan?

19. Laske $\vec{A} \times (\nabla \times \vec{B})$ ja $(\vec{A} \times \nabla) \times \vec{B}$ pisteessä $(1, -1, 2)$, kun $\vec{A} = xz^2\hat{i} + 2y\hat{j} - 3xz\hat{k}$ ja $\vec{B} = 3xz\hat{i} + 2yz\hat{j} - z^2\hat{k}$.

20. Laske $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kun $\vec{F} = (x - 3y)\hat{i} + (y - 2x)\hat{j}$ ja C on xy -tason suljettu käyrä

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos t \\ y &= 3 \sin t \end{aligned}$$

pisteestä $t = 0$ pisteeseen $t = 2\pi$.

21. Hiukkanen liikkuu pitkin käyrää $\vec{r} = (3 \cos t)\hat{i} + (4 \cos t)\hat{j} + (5 \sin t)\hat{k}$. Määrä hiukkasen nopeus $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, vauhti $v = |\vec{v}|$ ja $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ hetkellä t . Mikä on kiihtyvyyden projektio liikkeen tangentin suuntaan?

22. Laske $\nabla^2 \frac{1}{r}$, kun r on radiusvektorin pituus, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

23. Laske $\nabla \times (\nabla \times \vec{A})$, kun $\vec{A} = yz^2\hat{i} + 3xz^2\hat{j} + 2xyz\hat{k}$.

24. Ratkaise yhtälöt ja alkuarvo-ongelmat

a) $y' = \frac{x^2 - 1}{y^2}$, kun $y(1) = 1$ b) $y' = \frac{y}{x} + 2x + 1$

25. Etsi seuraavien differentiaaliyhtälöiden ratkaisut:

a) $y'' + 2y' - 8y = 0$; $y(0) = 3$ ja $y'(0) = -12$

b) $y'' + 2y = -11x + 1$

26. Differentiaalilaskentaa skalaarikentillä

a) Olkoon $\phi(x, y, z) = 2x^3 y^2 z$. Laske $\nabla^2 \phi$.

b) Määrittää vakiot a ja b siten, että pinnat $ax^2 - byz = (a + 2)x$ ja $4x^2 y + z^3 = 4$ ovat pisteessä $(1, -1, 2)$ kohtisuorassa toisiaan vastaan.

27. Laske integraali $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ pitkin xy -tason käyrää $y = x^2$ pisteestä $(0, 0)$

pisteeseen $(1, 2)$, kun $\vec{F} = 3xy\hat{i} + y^2\hat{j}$.

28. Hiukkanen liikkuu voimakentässä $\vec{F} = (y^2 \cos x + z^3)\hat{i} + (2y \sin x - 4)\hat{j} + (3xz^2 + 2)\hat{k}$.

a) Totea, että kenttä \vec{F} on konservatiivinen.

b) Etsi kenttää \vec{F} vastaava skalaaripotentiali.

c) Laske työ, joka tehdään siirrettäessä hiukkasta kentässä \vec{F} pisteestä $(0, 1, -1)$ pisteeseen $(\frac{\pi}{2}, -1, 2)$.

29. Etsi kaikki kompleksiluvut z , jotka toteuttavat yhtälön $z^* = \frac{2}{z} + i$

30. Etsi luvun 1 kaikki neljännet juuret. Luonnostele juuret kompleksitasoon.

31. Ratkaise yhtälö $z^2 = i$, ts. etsi imaginääriyksikön i neliöjuuret. Näytä juurten paikat kompleksitasossa..

32. Ratkaise yhtälö $z^2 + 81 = 0$. Hahmottele juuret kompleksitasoon.

VASTAUKSET FYSIIKAN MATEMATIIKAN 2. KERTAUSHARJOITUKSIIN

0. $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

1. -

2. a) $-\frac{1}{2}e^{-2x} + C$ b) $-2 \sin \frac{1}{2}x + C$

3. a) separoituva

b) separoituva, lineaarinen

c) separoituva, lineaarinen

d) separoituva

e) lineaarinen

f) lineaarinen

g) separoituva, eksakti

4. a) $\tan y = \frac{1}{2}e^{2x} + C$ b) $y = C \ln|x|$ c) $\arctan y = \frac{1}{3}x^3 - 2x + C$

5. a) $xy = C$ b) $re^{-\theta} = C$ c) $x^2 + xe^y = C$

6. a) $y = Ce^{x^2}$ b) $y = 3x + Cx^{-2}$ c) $y = x^2e^x + Cx^2$

7. a) $y = -\sqrt{4 - x^2}$ b) $yx - x - 3y + 2 = 0$ c) $y = (0.7 + x)e^{-kx}$

8. a) $y = (C_1 + C_2x)e^{-5x}$ b) $y = C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x)$

c) $y = e^{-x}(C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x)$

9. a) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 3x^2 - 6$ b) $y = C_1e^{3x} + C_2e^x + \sin x$

c) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

10. $\bar{r} = (140\hat{i} + 22\hat{j})$ $\bar{v} = (103\hat{i} + 4\hat{j})$ $\bar{a} = (50\hat{i})$

11. a) $2x\hat{i} + 3\hat{j} - 3z^2\hat{k}$ d) 5 f) 0

12. $\dot{\bar{r}}(t) = [v_0 \cos \alpha]\hat{i} + [v_0 \sin \alpha - gt]\hat{j}$ $\ddot{\bar{r}}(t) = g\hat{j}$

13. $\nabla \times \bar{F} = (3y - x)\hat{k}$, joten voima ei ole konservatiivinen

14. $\bar{F} = -(2ax + b)\hat{i} - b\hat{j}$

15. $\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j}$ $-\frac{2\sqrt{2}}{3}\hat{i} + \frac{1}{3}\hat{j}$ $\frac{27}{2}$

16. $\frac{1}{2}\pi R$

17. $y = 2e^{5x+5} + e^{-x-1}$

18. $12\hat{i} + 2\hat{j} - 20\hat{k}$ 16

19. $18\hat{i} - 12\hat{j} + 16\hat{k}$ $-2yz\hat{j} + (4y^2 + 15xz^2 + 3x^2z^2)\hat{k}$

20. 6π

21. $(-3\sin t)\hat{i} - (4\sin t)\hat{j} + (5\cos t)\hat{k}$, $(-3\cos t)\hat{i} - (4\cos t)\hat{j} - (5\sin t)\hat{k}$, 0

22. 0

23. $-4x\hat{j}$

24. a) $y^3 = x^3 - 3x + 3$ b) $y = 2x^2 + x \ln x + Cx$

25. a) $y = 3e^{-4x}$ b) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + 11x - 1$

26. a) $12xy^2z + 4x^3z$ b) $a = \frac{5}{2}$ $b = 1$

27. $\frac{13}{12}$

28. b) $U = -y^2 \sin x - z^3x + 4y - 2z + C$ c) $15 + 4\pi$

29. $-2i, i$

30. $1, i, -1, -i$

31. $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

32. $9i, -9i$