

Näyttö viimeistään 4.11.

1. Kirjoita napakoordinaateissa

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & -2i & \text{b)} & -1 + i & \text{c)} & 1 + \sqrt{3}i \\ \text{d)} & \sqrt{3} + i & \text{e)} & -15 & \text{f)} & 0 \end{array}$$

2. Etsi luvun  $u = 2 + 2i$  kaikki kuutiojuuret, ts. ratkaisut yhtälölle  $z^3 = u$ .

3. Osoita että jos  $z \in C$ , missä napakoordinaattiesityksessä on  $z = re^{i\phi}$ , kompleksinen logaritmi voidaan määritellä seuraavasti:

$$\ln z = \ln r + i\phi + i2\pi n, \quad n \in Z.$$

Vihje: logaritmi on eksponenttifunktion käänteisfunktio; osoita siis että  $e^{\ln z} = z$ . Funktio  $\ln z$  on esimerkki moniarvoisesta kompleksifunktiosta.

4. Ratkaiseeko

a)  $y = \sin x + x^2$  yhtälön  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = x^2 + 2$ ,

b)  $x = \cos t - 2 \sin t$  yhtälön  $x'' + x = 0$ ,

c)  $\theta = 2e^{3t} - e^{2t}$  yhtälön  $\frac{d^2\theta}{dt^2} - \theta \frac{d\theta}{dt} + 3\theta = -2e^{3t}$  ja

d)  $y = 3 \sin 2x + e^{-x}$  yhtälön  $y'' + 4y = 5e^{-x}$ ?

5. Tutki ovatko differentiaaliyhtälöt

a)  $(ye^{xy} + 2x)dx + (xe^{xy} - 2)dy = 0$

b)  $xydx + dy = 0$

c)  $(3r - \theta - 1)d\theta + \theta dr = 0$

separoituvia, eksakteja tai lineaarisia. Yhtälö voi kuulua useampaankin kategoriaan.