

Näyttö viimeistään 18.11.

1. Eräällä pienellä saarella on hetkellä t jänisten lukumäärä $y(t)$. Olettaen, että saarella ei ole petoeläimiä, voidaan jänisten määrän kasvun ajatella olevan suoraan verrannollinen jänisten kunkin hetkiseen määrään. Jänismäärän kasvaessa ruoan määrä jänistä kohden kuitenkin pienenee, jolloin niiden syntyvyyskin vähenee. Kun jänisten määrä saavuttaa tietyn rajan L , ei saatavilla oleva ruoka riitä enää elättämään ylimääräisiä jäniksiä. Jäniskantaa voidaan kuvata yhtälöllä

$$\frac{dy}{dt} = ky \left(1 - \frac{y}{L}\right),$$

missä k on aikayksikössä yhtä jänistä kohden syntyneiden jänisten lukumäärä (kasvukerroin).

- a) Etsi yhtälön yleinen ratkaisu (onko yhtälö separoituva? Käytä osamurto-lausekkeiden integrointia).
- b) Oletetaan, että jokainen jänispari saa vuodessa 4 poikasta, ts. $k = 2/\text{vuosi}$, että saari kykenee elättämään 1000 jänistä, ts. $L = 1000$ ja että hetkellä $t = 0$ niitä on siellä 10 kappaletta. Montako jänistä saarella on 3 vuoden kuluttua? Montako 100 vuoden kuluttua?

2. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$ty'' - (t + 2)y' + 2y = 0.$$

- a) Näytä että funktiot $y_1(t) = e^t$ ja $y_2(t) = t^2 + 2t + 2$ ovat yhtälön lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja.
- b) Etsi alkuehdot $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$ toteuttava ratkaisu.

3. Etsi yleiset ratkaisut yhtälöille

- a) $y'' + 8y' + 16y = 0$

- b) $u'' + 7u' - 4u = 0$

4. Ratkaise alkuarvotehtävät

- a) $y'' + 2y' + y = 0$ kun $y(0) = 1$ ja $y'(0) = -3$.

- b) $y'' - 2y' - 2y = 0$ kun $y(0) = 0$ ja $y'(0) = 3$.