Fysiikan matematiikka 763101P

- Luennoija: Kari Rummukainen, Fysikaalisten tieteiden laitos
- Tavoite: tarjota opiskelijalle nopeasti fysikaalisten tieteiden tarvitsemia matematiikan perustietoja ja taitoja. Ymmärrys ja käytännön soveltaminen päämääränä.
- *Laskentaa, ei matematiikkaa*
- Sisältö:
  - differentiaali- ja integraalilaskenta
  - potenssisarjat
  - kompleksiluvut ja -funktiot
  - lineaariset vakiokertoimiset differentiaaliyhtälöt
  - vektorilaskenta
  - vektorikenttien differentiaalit ja integraalilauseet (Gauss ja Stokes).

0. Kertausta alkeisfunktioista

- Funktio, kuvaus joukosta $A \to B$ merkitään

  $$y = f(x), \qquad x \in A, \;\; y \in B$$

  missä A on lähtöjoukko (määrittelyjoukko) ja B on arvojoukko (t. maalijoukko). (Tai $y = g(x)$, $\alpha = \phi(\beta)$ jne.)

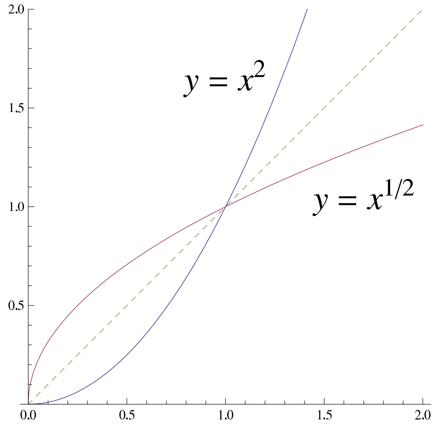
- Fysiikassa yleensä funktiot ovat kuvauksia reaaliluvuilta reaaliluvuille, $R \to R$ (tai R:n osajoukko, esimerkiksi R^+), tai kompleksiluvuilta kompleksiluvuille $C \to C$.

- **Käänteisfunktio**: funktion $y = f(x)$ käänteisfunktiota merkitään

  $$x = f^{-1}(y)$$

  mikäli käänteisfunktio on olemassa.

Esimerkki:



$$y = f(x) = x^2, \;\text{ missä }\; x \geq 0 \;\; (R^+ \mapsto R^+) \quad \Rightarrow \quad x = f^{-1}(y) = \sqrt{y} = y^{1/2}\,,$$

mutta kuvaus $R \mapsto R^+$, $y = x^2$ ei ole käännettävissä, sillä jokaista $y > 0$ vastaa 2 x:n arvoa $x = \pm\sqrt{y}$.

- Mikäli $\exists$ (on olemassa) f^{-1}, sanotaan että funktio f on **bijektio**.

- $(f^{-1})^{-1} = f$, ts. käänteisfunktion käänteisfunktio on funktio itse.

- **Yhdistetty funktio:** Olkoon annettu funktiot ($R \to R$, yksinkertaisuuden vuoksi) $y = f(x)$, $y = g(x)$. Näistä voidaan muodostaa kaksi yhdistettyä funktiota (myös $R \to R$)

  $$y = f(g(x)), \quad y = g(f(x)).$$

  Esim. funktioista $y = \sin x$ ja $y = x^2$ saadaan yhdistetyt funktiot $y = \sin x^2$ tai $y = (\sin x)^2 \equiv \sin^2 x$, missä viimeinen merkintä on konventio.

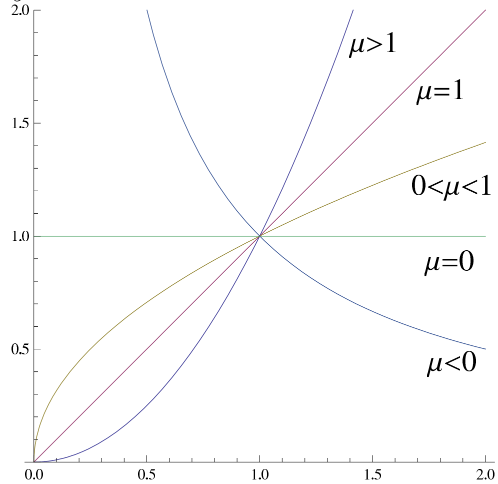
- Matematiikassa yhdistettyjä funktioita merkitään usein $g \circ f(x) = g(f(x))$. Tätä ei kuitenkaan käytetä juuri fysiikassa.

Potenssifunktio

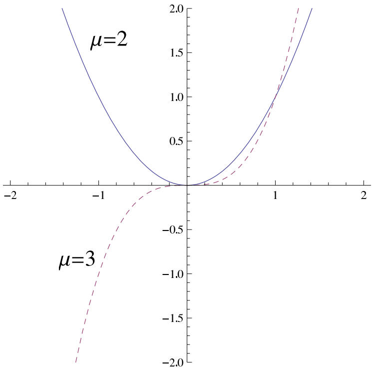
Potenssifunktio

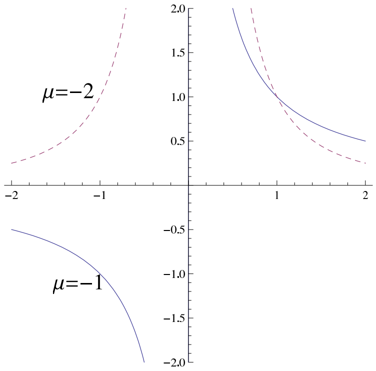
$$y = x^{\mu}$$

missä $\mu \in R$ on vakio, kuvaa positiiviset reaaliluvut positiivisille reaaliluvuille ($R^{+} \mapsto R^{+}$). Sen käänteisfunktio on $x = y^{1/\mu}$



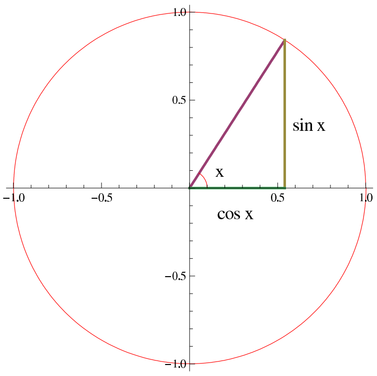
Jos μ on positiivinen kokonaisluku, x^{μ} on määritelty kaikilla $x \in R$; jos negatiivinen, x^{μ} on määritelty joukossa $\{x \in R | x \neq 0\}$.

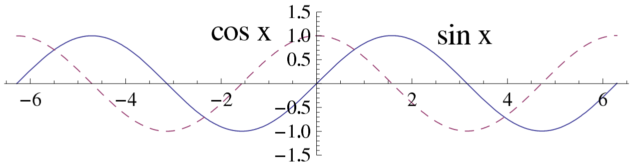




Trigonometriset funktiot

- Sini- ja kosinifunktiot $\sin x$ ja $\cos x$ määritellään yksikköympyrällä:





Yo. kuvassa on pituus otettava etumerkin kanssa, ts. sini ja kosini voivat olla negatiivisia.

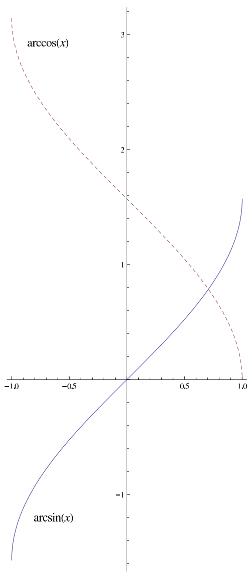
- Kulma x on *radiaaneina*, ts. kaaren pituus yksikköympyrällä.
- Funktiot ovat ilmeisestikin jaksollisia (periodisia), jakson pituus 2π = täysi ympyrä.
- Käänteisfunktiot ovat

$$y = \sin^{-1} x = \arcsin x, \quad y = \cos^{-1} x = \arccos x$$

monikäsitteisiä, ja näissä tavallisesti rajoitutaan *päähaaraan* ottamalla sopiva väli (ks. luku 1.2 luentomuistiinpanoista):

$$y = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \quad x = \overline{\arcsin} y, \ -1 \leq y < 1$$

$$y = \cos x, \quad 0 \leq x < \pi \qquad \Rightarrow \quad x = \overline{\arccos} y, \ -1 < y \leq 1$$

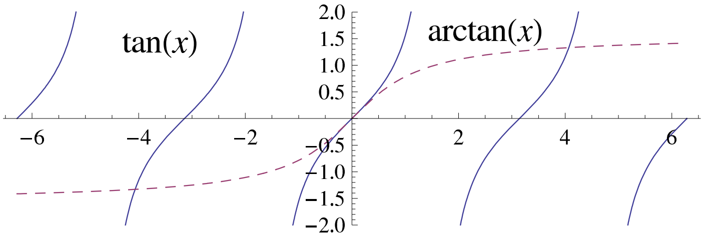


- Tangentti ja kotangentti:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Jälleen näillä on olemassa käänteisfunktiot, jos rajoitutaan päähaaralle, esim.

$$y = \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \arctan y, \quad -\infty < y < \infty$$



- Trigonometrisillä funktioilla on useita laskukaavoja, joista mainittakoon
  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (suoraan määritelmästä)
  $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$
  $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
  $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

Eksponenttifunktio ja logaritmi

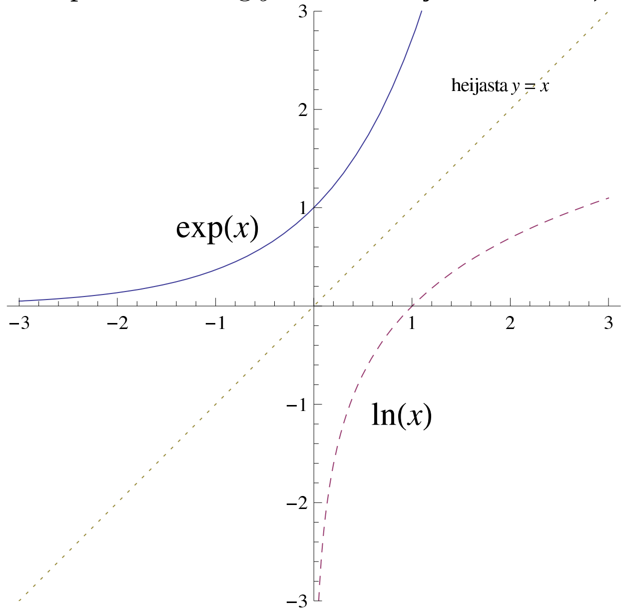
- Eksponenttifunktio

  $$y = e^x = \exp x$$

  on kuvaus $R \mapsto R^+$. Sen käänteisfunktio on luonnollinen logaritmi

  $$x = \ln y, \quad y > 0.$$

  (Tätä merkitään usein pelkästään $\log y$, etenkin ohjelmoinnissa.)



[Tässä e on Neperin luku (James Napier, 1550–1617), ja sen arvo voidaan kirjoittaa esim. seuraavilla tavoilla:

$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= \lim_{k\to\infty} (1 + \frac{1}{k})^k \\ &\approx 2.7182 \end{aligned}$$

Nämä käyvät selviksi myöhemmin!]

- Funktio e^x kasvaa *nopeammin* kuin mikään potenssifunktio x^μ, kun $x \to \infty$. Samoin funktio $\ln x$ kasvaa *hitaammin* kuin mikään funktio x^μ, $\mu > 0$.

- Laskusääntöjä:

  $(e^x)^\mu = e^{x\mu}$

  $e^{x+y} = e^x\, e^y$

  $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ (johda edellisestä!)

  $\ln x^\mu = \mu \ln x$ (johda ensimmäisestä!)

- Yleinen eksponenttifunktio voidaan muuntaa e:n eksponenttifunktioksi

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}, \quad a \in R^+$$

  Tämän käänteisfunktio on a-kantainen logaritmi

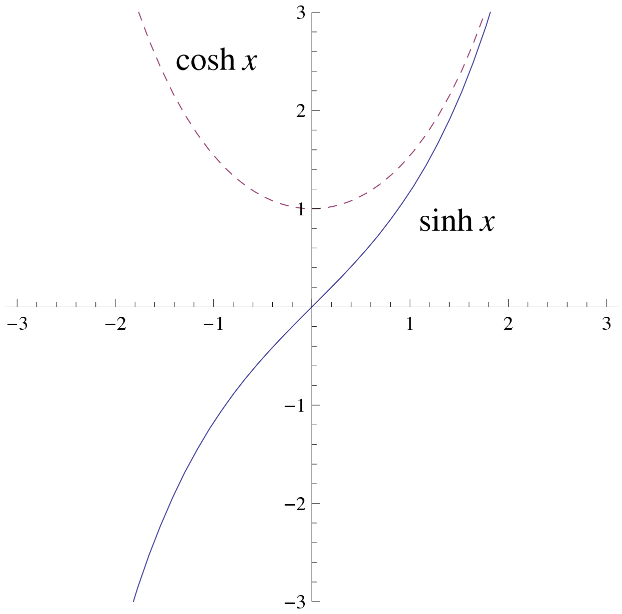
$$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$$

  Huom: $10^x = e^{x \ln 10} \approx e^{2.3059x}$.

Hyperboliset funktiot

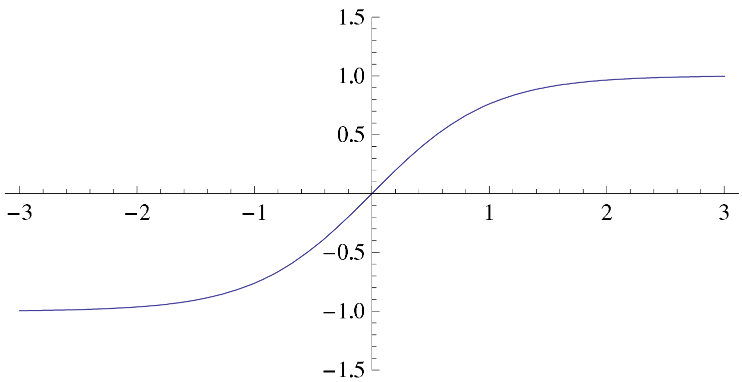
- Hyperbolinen sini ja kosini määritellään eksponenttifunktion avulla:

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \qquad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$



- Analogisesti trigonometrisen tangetin kanssa näistä voidaan muodostaa hyperbolinen tangentti (ja kotangentti):

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$



- Hyperbolisten funktioiden käänteisfunktioita kutsutaan areafunktioiksi, esim. $y = \sinh x \Rightarrow x = \sinh^{-1} y = \operatorname{arsinh} x$.

Raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktiolla $f(x)$ on *raja-arvo* f_0 pisteessä x_0, jos $f(x)$ lähestyy arvoa f_0 kun x lähestyy arvoa x_0. Tätä merkitään seuraavasti:

  $$f_0 = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

  Usein käytetään myös merkintää

  $$f(x) \to f_0, \text{ kun } x \to x_0.$$

- Raja-arvon määritys on selkeää esim. tapauksissa

  $$\lim_{x \to 1} x^2 + x = 2$$

  $$\lim_{x \to \pi/4} \sin x = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$$

  $$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

- "Kavalia" raja-arvoja, jos $f(x)$ lähestyy rajalla muotoa

  $$\frac{0}{0},\ 0^0,\ 0 \times \infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty - \infty$$

  jne. Näitä voidaan laskea l'Hopitalin säännöllä (1.4. luentomuistiinpanoissa) tai kehittämällä sarjaksi (palataan myöhemmin).

- Voimme myös määritellä *oikeanpuoleisen raja-arvon*

  $$f_0 = \lim_{x \to x_0+} f(x)$$

  eli x lähestyy arvoa x_0 positiiviselta puolelta.

- Vastaavasti *vasemmanpuoleinen raja-arvo* on

  $$f_0 = \lim_{x \to x_0-} f(x)$$

- Epäjatkuvalla funktiolla nämä voivat olla erilaiset: esim. Heavisiden askelfunktio

  $$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

  Oikeanpuoleinen raja-arvo on $\lim_{x \to 0+} \Theta(x) = 1$, mutta vasemmanpuoleinen $\lim_{x \to 0-} \Theta(x) = 0$. Askelfunktiolla *ei ole* varsinaista raja-arvoa kohdassa $x = 0$.

- Merkitään myös

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=\infty,\quad \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty$$

- **Jatkuvuus:** Funktio $f(x)$ on jatkuva pisteessä x_0, jos sillä on raja-arvo x_0:ssa ja

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Fysiikassa kaikki mielenkiintoiset funktiot ovat yleensä jatkuvia koko määrittelyalueessaan, kenties lukuunottamatta erityispisteitä (kuten askelfunktio).

- Esim. askelfunktio $\Theta(x)$ on jatkuva kaikilla reaaliluvuilla $x \neq 0$ ($\{x \in R | x \neq 0\}$), samoin funktio $f(x)=1/x$.

- Raja-arvoilla on myös seuraavat ominaisuudet (mikäli $\lim f(x)$ ja $\lim g(x)$ ovat olemassa; $x \to x_0$ jätetty lyhyyden vuoksi pois):

$$\lim[f(x)+g(x)]=\lim f(x)+\lim g(x)$$

$$\lim[f(x)\,g(x)]=\lim f(x)\,\lim g(x)$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)},\quad \text{jos } \lim g(x)\neq 0$$