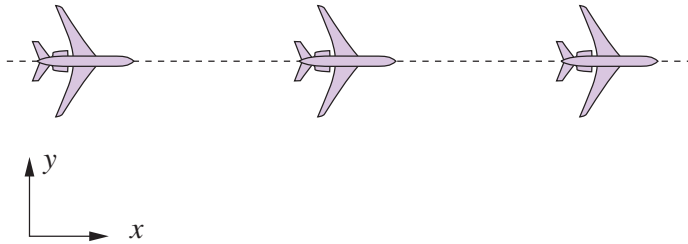


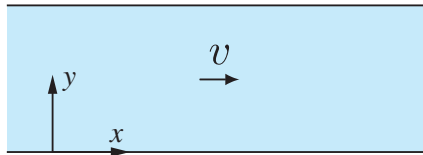
1. Risteävät lentokoneet

Lentokone lentää maahan kiinnitetyn koordinaatiston K suhteen nopeudella $u\hat{x}$. Oheisessa kuvassa se on kuvattuna kolmena peräkkäisenä tasavälisenä ajanhetkenä. Piirrä sama kuva nähtynä toisesta ylilentävästä koneesta, jolla on sama nopeus mutta suuntaan \hat{y} . Osoittaako piirtämässäsi kuvassa koneen nokka sen etenemissuuntaan?



2. Galilein muunnos

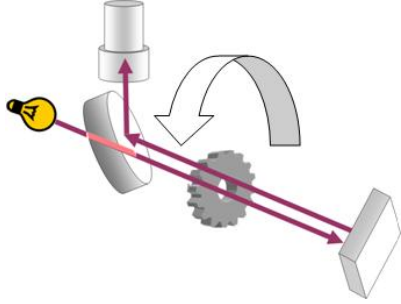
Oulujoen vesi virtaa nopeudella v ja fysiikan opiskelijan uintinopeus veden suhteen on c ($c > v$). Käyttäen Galilein muunnosta, kirjoita uimarin nopeusvektorit (\mathbf{u} ja \mathbf{u}') sekä maahan sidotussa koordinaatistossa K että veden mukana kulkevassa koordinaatistossa K' , kun hän ui a) suoraan myötävirtaan, b) suoraan vastavirtaan, c) lyhyintä reittiä joen yli ($u_x = 0$) ja d) nopeinta reittiä joen yli ($u'_x = 0$). Katsotaan Oulujokea Linnanmaalta päin, jolloin idealisoitu joki ja virtaussuunta siinä ovat kuvan mukaiset.



3. Valon nopeuden mittaaminen

- a) Tanskalainen astronomi Ole Römer arvioi valon nopeuden vuonna 1676 perustuen havaintoon että Jupiterin kuiten pimennykset eivät näyttäneet tapahtuvan tasavälisesti. Ne näyttivät tapahtuvan jonkin verran aikaisemmin silloin kun Maa oli kiertoradallaan lähellä Jupiteria verrattuna siihen että Maa oli (puolta vuotta myöhemmin) kaukana Jupiterista. Arvioi millä tarkkuudella Römerin täytyi pystyä pimennysten ajat määrittämään kun Maan keskietäisyys Auringosta $= 1 \text{ AU} \approx 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ ja Jupiter on noin 5 AU:n päässä Auringosta.

- b) Vuonna 1849 ranskalainen Hippolyte Fizeau mittasi valon nopeuden maanpäällisessä kokeessa (kuva), missä rattaan pyöriessä sopivalla nopeudella se ehti pyörähtää juuri yhden hampaanvälin kun valo kulkee sen läpi peilille ja palaa takaisin. Laske millä taajuudella (käytä laatua hammasta/sekunti) hampaiden täytyy pyöriä kun peilin ja rattaan välinen etäisyys oli 8 km.



(kuva: Brews ohare)

- c) Puheluita voidaan välittää geostationaarisella kiertoradalla (korkeus ~ 36000 km) olevan satelliitin kautta. Kuuleeko tästä aiheutuvan viiveen satelliittipuheluissa?

4. Maxwellin yhtälöiden aaltoratkaisu

Tarkastellaan yritettä

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 \hat{\mathbf{y}} f(x - ct) \\ \mathbf{B} &= B_0 \hat{\mathbf{z}} f(x - ct), \end{aligned} \quad (1)$$

missä $f(x - ct)$ on funktio joka riippu $x - ct$:stä. Sijoita yrite Maxwellin yhtälöihin

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}. \quad (5)$$

Osoita että tämä on yhtälöiden ratkaisu tyhjiössä ($\rho = 0$ ja $\mathbf{j} = 0$) ja kun valitaan $E_0 \neq 0$, saadaan

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad (6)$$

ja ehto E_0 :n ja B_0 :n välille. (Vihje: Maxwellin yhtälöt käsitellään myöhemmin sähkömagnetismin kurssilla. Tässä on tarkoitus käsitellä näitä yhtälöitä puhtaasti matemaattisesti, jonka pitäisi onnistua Fysiikan matematiikkaa -kurssin pohjalta.)

1. Lorentzin hypoteesi

Selittääkseen Michelsonin ja Morleyn kokeen, Lorentz esitti hypoteesin jonka mukaan kappaleet (ja kaikki muutkin etäisyydet) lyhenevät liikesuunnassaan pituuteen $l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Tässä l_0 on kappaleen pituus eetterin lepokoordinaatistossa ja v kappaleen nopeus eetterin suhteen. Liikesuuntaa vastaan koh-tisuorissa suunnissa hän oletti kappaleen mittojen pysyvän muuttumattomi-na. Osoita että Lorentzin hypoteesillä voidaan selittää Michelsonin ja Morleyn kokeen tulos.

2. Lorentzin muunnoksen ominaisuuksia

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - vx/c^2). \end{cases} \quad (7)$$

missä $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ja $|v| < c$.

- Johda Lorentzin muunnoksen käänteismuunnos ratkaisemalla x, y, z ja t kaavoista (7).
- Osoita että myös koordinaattien erotukset $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$ muuntuvat Lorentz-muunnoksissa kuten koordinaatit, ts.

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t), \quad \Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2).$$

- Osoita että suure $c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ säilyy muuttumattomana Lorentzin muunnoksessa.

3. Lorentzin muunnos numeerisesti

- Tapahtuman koordinaatit koordinaatistossa K' ovat $x' = 1$ km ja $t' = 0$. Laske tapahtuman koodinaatit koordinaatistossa K , johon nähden K' liikkuu yhteisen x akselin suuntaan nopeudella 300 m/s (noin äänen nopeus ilmassa). Vertaa tulosta Galilein muunnoksella saataviin koordinaatteihin. Vastaukseksi riittää taskulaskimesi antama tarkkuus.
- Sama kuin edellä mutta K' liikkuu nopeudella $0.2c$.
- Tapahtuman koordinaatit koodinaatistossa K' ovat $x' = 0$ ja $t' = 3 \times 10^7$ s (noin yksi vuosi). Laske tapahtuman koodinaatit koordinaatistossa K , johon nähden K' liikkuu yhteisen x akselin suuntaan nopeudella $0.2c$. Vertaa tulosta Galilein muunnoksella saataviin koordinaatteihin.

4. Tupla aikaväli

Laske suoraan Lorentz-muunnoksista: kaksi tapahtumaa sattuu samassa paikassa aikavälin ollessa 1 h. Mikä on tapahtumien välinen paikkaero koordinaatistossa missä aikaero on 2 h?

1. Ajan venyminen

Lentokone kiertää maata nopeudella 300 m/s. Montako vuotta kuluu ennen kuin kellonaika lentokoneessa eroaa maan ajasta yhdellä sekunnilla? (Käytä hyväksesi Taylorin sarjaa. Maan pyörimistä ei oteta huomioon.)

2. Nopeat opiskelijat

Hetkellä $t = 0$ laboratoriotöitä tekevä opiskelija K lähettää lasersäteen 1 m päässä (x -akselilla) olevaan mittalaitteeseen, jossa syttyy merkkilamppu. Opiskelija L juoksee mittalaitteen ohi x -akselin suuntaisesti, ja hänen koordinaatistonsa kellojen mukaan kokeeseen kuluu vain puolet K:n havaitsemasta ajasta. Mikä on L:n nopeus? Myös opiskelija M juoksee kokeen ohi, ja hänen mielestään kokeeseen kuluu kaksi kertaa niin kauan kuin K havaitsee. Mikä on M:n nopeus?

3. Majakan ohitus

Tähtienvälinen rahtialus, jonka lepopituus on 300 m, lähestyy kotisatamaansa ja sujahtaa avaruusmajakan ohi nopeudella $0.8c$. Oletetaan, että aluksen keulan ollessa majakan kohdalla sekä aluksen että majakan kellot synkronoituvat näyttämään nollaa. Aluksen keulasta lähtee tällöin (valonnopeudella) signaali perässä oleville moottoreille.

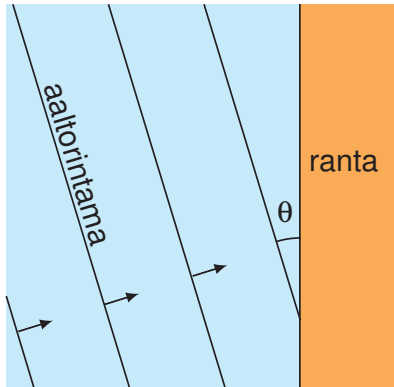
- Millä hetkellä signaali saapuu moottoreihin aluksen kellon mukaan?
- Millä hetkellä signaali saapuu moottoreihin majakan kellon mukaan?
- Millä hetkellä aluksen perä ohittaa majakan majakan kellon mukaan?

4. Minkowskin diagrammi

- Tohtori Outolempi tekee laboratoriokoordinaatistossa K kokeen, jossa kaksi hiukkasta emittoituvat nopeudella $v = 0.5c$ tapahtumasta $ct = -2$ m, $x = 0$. Toinen hiukkasista liikkuu positiivisen x -akselin ja toinen negatiivisen x -akselin suuntaan. Hiukkaset osuvat paikoissa $x = \pm 2$ m oleviin ilmaisimiin. Viiveen $ct = 0.5$ m jälkeen ilmaisimet lähettävät signaalit takaisin paikkaan $x = 0$ nopeudella $v = 0.75c$. Piirrä näistä Minkowskin diagrammi.
- Signaalit saapuvat paikkaan $x = 0$ samalla hetkellä. Tästä tohtori Outolempi päättelee, että ilmaisimet lähettivät signaalit yhtäaikaan, koska ne ovat yhtä kaukana. Selitä miksi tämä pitää paikkansa.
- Tohtori Outolempien assistentti Jussi (K') liikkuu negatiivisen x -akselin suuntaan nopeudella $v = 0.75c$ laboratoriokoordinaatiston K suhteen. Piirrä Jussin aika-avaruus-akselit edellä piirtämäsi Minkowskin diagrammiin. Lähettävätkö ilmaisimet signaalin samaan aikaan Jussin mielestä? Jos ei, niin kumpi signaali lähtee ensin?

1. Valoa nopeampi liike

- a) Viivasuora aaltorintama tulee niin ikään viivasuoralle rantaviivalle nopeudella $v = 10 \text{ m/s}$ siten, että se on kulmassa θ rantaviivaan nähden. Millä nopeudella piste, missä aallonharja saavuttaa rantaviivan, liikkuu rantaviivaa pitkin. Miten tämä riippuu kulmasta θ ? Voiko näin siirtää tietoa valoa nopeammin?



- b) Osoitat laserosoittimella kohti kuuta, joka on etäisyydellä 384000 km. Heilutat osoitinta kulmanopeudella $d\theta/dt = 3 \text{ rad/s}$. Millä nopeudella valopiste liikkuu kuun pinnalla? (Oleta että kuun pinta on kohtisuorassa valon tulosuuntaan nähden.) Voiko näin siirtää tietoa valoa nopeammin?

2. Tapahtumaparit

Tarkastellaan seuraavia tapahtumapareja A,B:

- a) $ct_A = 0, x_A = 0, y_A = 0, z_A = 0;$ $ct_B = 4, x_B = 3, y_B = 2, z_B = 1$
 b) $ct_A = 1, x_A = 1, y_A = 1, z_A = 1;$ $ct_B = 3, x_B = 3, y_B = 2, z_B = 1$
 c) $ct_A = -2, x_A = 4, y_A = 2, z_A = 2;$ $ct_B = 3, x_B = 0, y_B = -1, z_B = 2$

Laske näille tapahtumille Δs^2 . Kumpi seuraavista pitää paikkansa, vai pitääkö kumpikaan: i) löytyy koordinaatisto, jossa tapahtumat A ja B ovat samanaikaisia, tai ii) löytyy koordinaatisto, jossa tapahtumilla A ja B on sama paikka.

3. Kaksosparadoksi

Kaksosista K jää maahan ja L lähtee avaruusaluksella Maasta kohti Alfa Centauria, jonka etäisyys on 4 valovuotta, ja L kulkee koko matkan tasaisella nopeudella $\frac{4}{5}c$. Saavuttuaan perille L kääntyy takaisin ja matkaa välittömästi kohti Maata samalla tasaisella nopeudella. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi että kiihtyvyys on niin suuri että lähtökiihdytykseen, käännökseen ja loppujarrutukseen käytetty aika voidaan jättää huomiotta.

- a) Kuinka kauan K:n mielestä kuluu yhdensuuntaiseen matkaan?
 b) Kuinka kauan L:n mielestä kuluu yhdensuuntaiseen matkaan?

- c) Mikä on kaksosten ikäero kun he kohtaavat jälleen.
- d) Kuinka paljon K on vanhentunut (matkan alusta laskettuna) L:n lepokoordinaatiston mukaan juuri ennen kuin L aloittaa kääntymisen?
- e) Tarkastellaan K:ta L:n lepokoordinaatistossa juuri ennen käännöstä ja heti sen jälkeen. Kuinka paljon K vanhenee L:n koordinaatiston mukaan käännöksen aikana?

(Vihje: Helpoiten tulokset saa soveltamalla ajan venymäkaavaa kohdissa b, c ja d.)

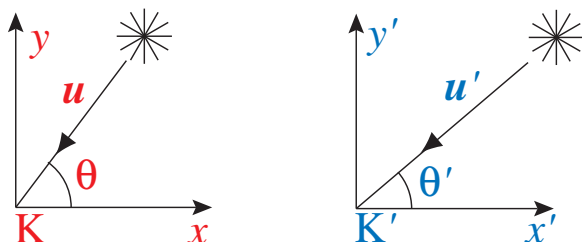
4. **Ladaparadoksi** (tunnetaan myös tikapuuparadoksina)

Igor ajaa 4 m pitkän Ladansa vakionopeudella $0.8c$ autotalliin, jonka pituus on 3 metriä. Igorin serkku Nikolai seisoo autotallin ovella.

- a) Kuinka pitkä Igorin Lada on autotallia lähestyessään Nikolain mielestä?
- b) Kun Lada on kokonaan tallissa Nikolai sulkee tallin ovet. Minkä ajan kuluttua ovien sulkemisesta Ladan keula osuu tallin takaseinään Nikolai näkökulmasta?
- c) Kuinka pitkä on autotalli Igorin mielestä? Entä Lada?
- d) Miten selität sen että Nikolain mielestä Lada mahtuu ehjänä talliin mutta ei Igorin? Piirrä tapahtumasta aika-avaruusdiagrammi mihin merkitset tapahtumat (A) Ladan keula tulee talliin sisään, (B) ovet suljetaan, (C) törmäyshetki sekä törmäyshetken kanssa samanaikaiset tapahtumat Nikolain ja Igorin mielestä.
- e) Mihin saakka pystyt päättelemään Ladan takapuskurin maailmanviivan edellä annetuilla tiedoilla?

1. Aberraatio suhteellisuusteoriassa

Kaukainen tähti näkyy K:lle kulmassa θ laskettuna K':n kulkusuunnasta.



- a) Käyttäen nopeuden Lorentz-muunnosta valolle ($|\mathbf{u}| = c$) osoita, että nopeudella v (K:n suhteen) liikkuva K' näkee tähden kulmassa θ' , missä

$$\tan \theta' = \frac{c \sin \theta \sqrt{1 - v^2/c^2}}{v + c \cos \theta}. \quad (8)$$

- b) Maan nopeus $v \approx 30$ km/s. Osoita kaavan (8) perusteella, että suoraan maan rataa kohtisuorassa suunnassa olevan tähden ($\theta = \pi/2$) aberraatiokulmalle $\alpha = \theta - \theta'$ saadaan $\alpha \approx v/c \approx 10^{-4}$ rad (monisteen sivulla 5 mainittu tulos). (Vihje: osoita ensin että $\tan(\pi/2 - \alpha) \approx 1/\alpha$ kun $\alpha \ll 1$.)

2. Vakiovoima

Oletetaan että aluksi paikallaan olevaan kappaleeseen (lepomassa m) alkaa hetkellä $t = 0$ vaikuttaa vakiovoima f . Osoita että hiukkasen nopeus on luenolla mainitun kaavan

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{(m/ft)^2 + 1/c^2}} \quad (9)$$

mukainen. Päättele tästä että hiukkasen etenemä matka on

$$x(t) = \frac{mc^2}{f} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{ft}{mc}\right)^2} - 1 \right]. \quad (10)$$

Osoita että tämä yhtyy tulokseen, joka saadaan Newtonin teorialla kun t on pieni.

3. Nopeus energiasta

Vapaa neutroni hajoaa (puoliintumisaika noin 10 min) protoniksi, elektroniksi ja neutriinoksi. Reaktiossa vapautuva energia on 782 keV. Laske syntyvän elektronin maksimaalinen nopeus, joka saavutetaan kun koko vapautuva energia menee elektronin kineettiseksi energiaksi. Elektronin massa $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg. (Vastaus: $0.92c$)

4. Liikemassan mittaus

- a) Synkrotroni on hiukkaskiihdytin missä varattu hiukkanen kulkee ympyrärataa. Tarvittavan keskeiskiihtyvyyden saa aikaan Lorentz-voima $f = quB$ missä B on ratatasoa vastaan kohtisuora magneettikenttä, u hiukkasen nopeus ja q hiukkasen varaus. Määritä magneettikenttä B mikä tarvitaan pitämään hiukkanen radalla jonka säde on r . Piirrä riippuvuus $B(u)$ kun säde r on vakio. Millainen riippuvuus olisi jos suhteellisuusteorian sijasta olisi käytetty Newtonin mekaniikkaa?
- b) CERNin LHC-kiihdyttimessä protonin maksimienergia on 7×10^6 MeV. Mikä on tällöin hiukkasen nopeus? (Protonin lepoenergia on 939 MeV.) Kuinka paljon suurempi magneettikenttä tarvitaan verrattuna Newtonin teorian mukaiseen tulokseen samalla hiukkasnopeudella? (Vastaus: $u = 0.999999991c$, $B/B_{\text{Newton}} = 7450$)

5. Energian ja massan ekvivalenssi

Verrataan kahta tapausta: 1) elektroni ja protoni ovat sitoutuneet vetyatomiksi, joka on perustilassaan ja levossa, tai 2) elektroni ja protoni ovat levossa ja kaukana toisistaan. Näiden kahden tilan energiaero eli vetyatomin sidosenergia on sama kuin Rydbergin energia $R_E = m_e e^4 / 32 \pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 = 13.6$ eV.

- a) Kuinka paljon vetyatomi on kevyempi kuin erilliset elektroni ja protoni yhteensä?
- b) Elektronin keskimääräinen kineettinen energia vetyatomissa on myös R_E . (Protonin kineettinen energia on mitätön.) Mikä on silloin potentiaalienergia vetyatomissa? (Vastaus: $E_{\text{pot}} = -27.2$ eV.) Koska se on negatiivinen, on syytä ihmetellä onko siihen sitoutunut negatiivinen massa.
- c) Edellisen kohdan ongelmaa voidaan selvittää toteamalla, että elektroni on varattu hiukkanen. Siksi siihen liittyy aina sähkökentän energia, ts. ainakin osa elektronin lepoenergiasta aiheutuu sen sähkömagneettisesta kentästä. (Lisäksi elektronilla voi olla jokin sisäinen massa, mutta kukaan ei tiedä sen suuruutta.) Sama pätee protoniin. Mitä silloin voit sanoa sähkömagneettiseen kenttään sitoutuneesta massasta edellä mainituissa tapauksissa 1 ja 2?