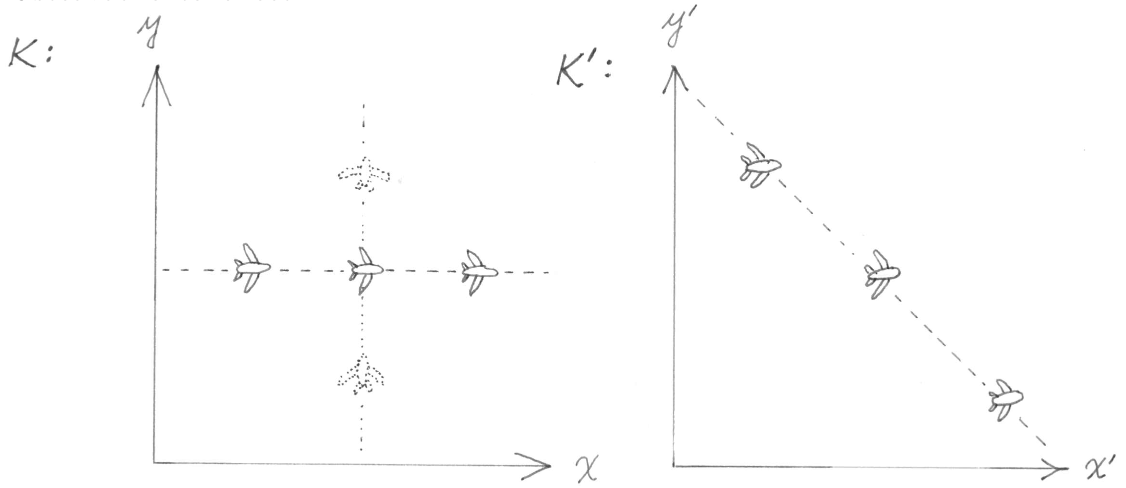
1. **Risteävät lentokoneet**



Ylläolevassa kuvassa on lentokoneet piirrettyina ensin Maan koordinaatistossa K, ja sitten ylilentävän koneen koordinaatistossa K'. Huomioi nokan suunta! Vaikka itään lentävän koneen nokka osoittaa tässäkin itään, etenee se ylilentävän koneen suhteen "kaakkoon".

2. **Galilein muunnos** . Kuvan mukaan virran nopeus on $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{x}}$. Olkoon K maan lepokoordinaatisto, K′ veden lepokoordinaatisto. Eri tilanteet on esitetty kuvassa 1.

Galilein muunnos ($\boldsymbol{u}$ tässä uimarin nopeus):

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}. \tag{1}$$

Yritetään tämän tehtävän ratkaisussa käyttää Galilein muunnosta niin paljon kuin mahdollista. Ratkaistaan ongelmat seuraavasti: Kirjoitetaan se nopeus, jonka tehtävänannossa on annettu, ja muunnetaan se toiseen koordinatistoon Galilein muunnoksella.

(a) Uimari ui suoraan myötävirtaan, joten veden lepokoordinaatistossa nopeus on $\boldsymbol{u}' = c\hat{\boldsymbol{x}}$. Tarvitaan "pilkuton" $\boldsymbol{u}$. Sovelletaan Galilein muunnosta (1): $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v} = c\hat{\boldsymbol{x}} + v\hat{\boldsymbol{x}} = (c+v)\hat{\boldsymbol{x}}$. Eli

$$\underline{\underline{\boldsymbol{u} = (c+v)\hat{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{u}' = c\hat{\boldsymbol{x}}.}}$$

(b) Uimari ui suoraan vastavirtaan, eli veden lepokoordinaatistossa $\boldsymbol{u}' = -c\hat{\boldsymbol{x}}$. Galilein muunnos antaa $\boldsymbol{u}$:n, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v} = -c\hat{\boldsymbol{x}} + v\hat{\boldsymbol{x}} = (v-c)\hat{\boldsymbol{x}}$. Eli

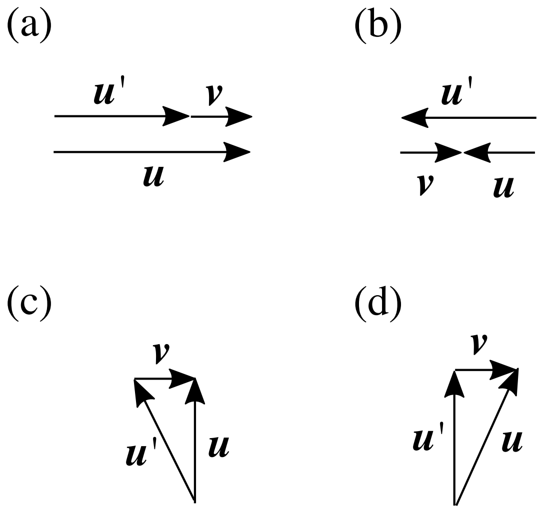
$$\underline{\underline{\boldsymbol{u} = (v-c)\hat{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{u}' = -c\hat{\boldsymbol{x}}.}}$$

(c) Lyhin reitti kulkee joen uomaa kohtisuoraan. Näin ollen K koordinaatistossa uimarilla voi olla vain $\hat{\boldsymbol{y}}$:n suuntaista nopeutta. Emme tiedä vielä nopeuden suuruutta, joten merkitään $\boldsymbol{u} = u\hat{\boldsymbol{y}}$. Galilein muunnos antaa nyt $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = u\hat{\boldsymbol{y}} - v\hat{\boldsymbol{x}}$. Uimarin nopeus veden suhteen on aina c, eli $\boldsymbol{u}'$:n pituus on $u' = \sqrt{u^2+v^2} = c$. Tästä voidaan ratkaista u:

$$u^2 + v^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad u^2 = c^2 - v^2 \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{c^2 - v^2}.$$

Eli

$$\underline{\underline{\boldsymbol{u} = \sqrt{c^2-v^2}\hat{\boldsymbol{y}}, \quad \boldsymbol{u}' = -v\hat{\boldsymbol{x}} + \sqrt{c^2-v^2}\hat{\boldsymbol{y}}.}}$$



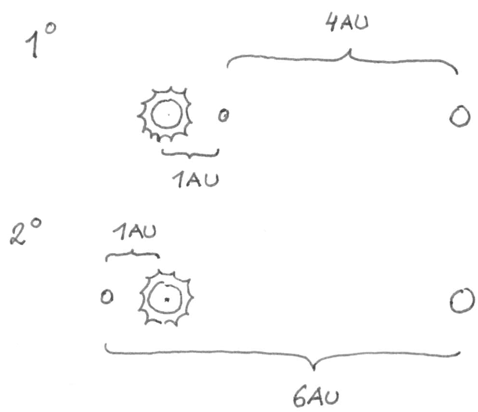
Kuva 1: Uimarin ja joen veden nopeusvektorit.

(d) Nopeiten uimari pääsee joen yli uimalla kokoajan kohti vastarantaa. Siksi nopeuden täytyy olla K′ koordinaatistossa vain y-suuntaan, eli $\boldsymbol{u}' = c\hat{\boldsymbol{y}}$. Galilein muunnos antaa $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{x}} + c\hat{\boldsymbol{y}}$. Eli

$$\underline{\underline{\boldsymbol{u} = v\hat{\boldsymbol{x}} + c\hat{\boldsymbol{y}}, \quad \boldsymbol{u}' = c\hat{\boldsymbol{y}}.}}$$

3. **Valon nopeuden mittaus**

(a)



Tapausten 1° ja 2° välillä Maan etäisyys Jupiterista vaihtelee 2 AU:n verran. Jos Jupiterin kuun pimennys tapahtui hetkellä t Maan ollessa lähellä Jupiteria, tapahtuu se hetkellä $t + \Delta t$ Maan ollessa kaukana Jupiterista. Nyt Δt on siis se aika, joka valolta kuluu kulkea 2 AU:n matka:

$$\frac{2 \text{ AU}}{c} = \frac{2 \times 1.5 \times 10^{11}\text{m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 10^3 \text{ s} \approx 17 \text{ min}.$$

Pimennysten ajat tulisi tietää tätä huomattavasti tarkemmin, eli vähintään minuuttien tarkkuudella riippuen kuinka tarkka tulos valonnopeudelle halutaan.

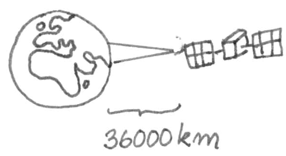
(b) Yhden hampaanvälin pyörähdyksessä tulee kulua aika, joka kuluu valolta peilille ja takaisin, 16 km. Eli:

$$t = \frac{16 \text{ km}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} \approx 5.3 \times 10^{-5} \text{ s}.$$

Taajuus on siten

$$f = \frac{1}{t} = \underline{\underline{0.19 \times 10^5 \text{ Hz.}}}$$

(c)



Lasketaan viive

$$t = \frac{2 \times 36000 \text{ km}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} \approx \underline{\underline{0.24 \text{ s.}}}$$

Näin lyhyttä viivettä ei välttämättä ole helppo huomata muulloin kuin kiivaimmissa keskusteluissa.

4. **Maxwellin yhtälöiden aaltoratkaisu** Annetut sähkö- ja magneettikentät ovat siis

$$\boldsymbol{E} = E_0 \hat{\boldsymbol{y}} f(x - ct), \quad \boldsymbol{B} = B_0 \hat{\boldsymbol{z}} f(x - ct).$$

Nämä tulee sijoittaa annettuihin Maxwellin yhtälöihin tyhjiössä ($\rho = 0$, $\boldsymbol{j} = 0$),

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{2a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2b}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2c}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2d}$$

ja katsoa, että yhtälöt toteutuu. Kertaa divergenssien ja roottorien määritelmät, jos et niitä muista!
Merkitään seuraavassa

$$\boldsymbol{E} = E_x \hat{\boldsymbol{x}} + E_y \hat{\boldsymbol{y}} + E_z \hat{\boldsymbol{z}}, \quad \boldsymbol{B} = B_x \hat{\boldsymbol{x}} + B_y \hat{\boldsymbol{y}} + B_z \hat{\boldsymbol{z}},$$

missä $E_x = E_z = 0$, $E_y = E_0 f(x - ct)$, ja $B_x = B_y = 0$, $B_z = B_0 f(x - ct)$.
Käydään yhtälöt läpi järjestyksessä:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} 0 + \frac{\partial}{\partial y}(E_0 f(x - ct)) + \frac{\partial}{\partial z} 0 = 0. \quad \text{OK!}$$

Eli $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$, niinkuin kaava (2a) vaatii.

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E} &= \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \hat{\boldsymbol{x}} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \hat{\boldsymbol{y}} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \hat{\boldsymbol{z}} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \\ &= \hat{\boldsymbol{x}} \left(0 - \frac{\partial}{\partial z}(E_0 f(x - ct)) \right) - \hat{\boldsymbol{y}} (0 - 0) + \hat{\boldsymbol{z}} \left(\frac{\partial}{\partial x}(E_0 f(x - ct)) - 0 \right) \\ &= E_0 \hat{\boldsymbol{z}} f'(x - ct). \end{aligned}$$

Toisaalta,

$$-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -(-c) B_0 \hat{\boldsymbol{z}} f'(x - ct).$$

Jotta kaava (2b) toteutuisi, on oltava

$$E_0 \hat{\boldsymbol{z}} f'(x - ct) = c B_0 \hat{\boldsymbol{z}} f'(x - ct) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{E_0 = c B_0.}} \qquad \text{OK!}$$

B-kentän divergenssi, kaava (2c):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} 0 + \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial z} B_0 f(x - ct) = 0. \quad \text{OK!}$$

Ja lopuksi (2d):

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{B} &= \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{\boldsymbol{x}} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) - \hat{\boldsymbol{y}} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) + \hat{\boldsymbol{z}} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \\
&= \hat{\boldsymbol{x}} \left(\frac{\partial}{\partial y} B_0 f(x - ct) - 0 \right) - \hat{\boldsymbol{y}} \left(\frac{\partial}{\partial x} B_0 f(x - ct) - 0 \right) + \hat{\boldsymbol{z}} \, (0 - 0) \\
&= -\hat{\boldsymbol{y}} B_0 f'(x - ct).
\end{aligned}$$

Toisaalta,

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 (-1) c E_0 \hat{\boldsymbol{y}} f'(x - ct).$$

Jotta kaava (2d) puolestaan toteutuisi, on oltava

$$-B_0 \hat{\boldsymbol{y}} f'(x - ct) = \mu_0 \varepsilon_0 (-1) c E_0 \hat{\boldsymbol{y}} f'(x - ct) \quad \Rightarrow \quad B_0 = \mu_0 \varepsilon_0 c E_0.$$

Kun käytetään aiempaa tulosta $E_0 = cB_0$, saadaan

$$B_0 = \mu_0 \varepsilon_0 c^2 B_0 \quad \Rightarrow \quad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}}}. \qquad \text{OK!}$$

Yhtälöt siis toteutuvat, $E_0 = cB_0$, ja $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$.