1. **Lorentzin hypoteesi**. Tulee siis näyttää, että Michelsonin ja Morleyn tulos $S = 0$ seuraa Lorentzin hypoteesista. Koska S, interferenssijuovien siirtymä, on verrannollinen aikaerotusten erotukseen Δ, tulee näyttää, että $\Delta = 0$.

   Lähdetään luentojen kaavoista

$$\Delta t = \frac{2\gamma}{c}(\gamma\ell_2 - \ell_1), \tag{1}$$
$$\overline{\Delta t} = \frac{2\gamma}{c}(\ell_2 - \gamma\ell_1), \tag{2}$$

   ja

$$\Delta = \Delta t - \overline{\Delta t}.$$

   Nämä pätevät, jos oletetaan että ne on johdettu eetterin lepokoordinaatistossa. Siirrytään nyt koordinaatistoon, jossa Maan liike ei ole eetterin mukaista. Merkitään korjattuja aikaeroja $\Delta t'$:lla ja $\overline{\Delta t}'$:lla. Kaavassa (1) pituus ℓ_2 on liikkeen suunnassa, joten se kutistuu kertoimella $\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1/\gamma$. Korvataan ℓ_2 siis ℓ_2/γ:lla. Pituus ℓ_1 pysyy ennallaan, koska se on kohtisuorassa liikettä vastaan.

$$\Delta t' = \frac{2\gamma}{c}(\ell_2 - \ell_1).$$

   Vastaavasti, kun koetta kierretään 90°, kutistuu kaavassa (2) pituus ℓ_1 ja ℓ_2 puolestaan pysyy ennallaan:

$$\overline{\Delta t}' = \frac{2\gamma}{c}(\ell_2 - \ell_1).$$

   Saadaan siis M&M:n tulos:

$$\underline{\underline{\Delta = \Delta t' - \overline{\Delta t}' = 0,}}$$

   eli ei siirtymää.

2. **Lorentzin muunnoksen ominaisuuksia** Lorentzin muunnos:

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{3a}$$
$$y' = y \tag{3b}$$
$$z' = z \tag{3c}$$
$$t' = \gamma(t - vx/c^2) \tag{3d}$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{3e}$$

   (a) Käänteismuunnos. Tulee siis ratkaista

$$x = x(x', y', z', t'),$$
$$y = y(x', y', z', t'),$$
$$z = z(x', y', z', t'),$$
$$t = t(x', y', z', t'),$$

   toisin sanoen, lausua pilkuttomat koordinaatit pilkullisten avulla (kaava (3) tekee juuri päinvastaisen).

   Koordinaatit y ja z ovat helpot:

$$y = y',$$
$$z = z'.$$

Jäljelle jää ratkaista yhtälöistä

$$x' = \gamma(x - vt), \tag{4a}$$
$$t' = \gamma(t - vx/c^2), \tag{4b}$$

koordinaatit x ja t. Askel askeleelta, aloitetaan kaavasta (4a), josta ratkaistaan x:

$$
\begin{aligned}
&(4a) \quad \Rightarrow \quad & x &= \frac{1}{\gamma}x' + vt && \text{Sij. tämä } x \text{ kaavaan (4b)} && (5a)\\
&(4b) \quad \Rightarrow \quad & t' &= \gamma\left[t - \frac{v}{c^2}\left(\frac{x'}{\gamma} + vt\right)\right] && \text{Kerää yhteiset tekijät} &&\\
& & &= \gamma\underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}_{=\gamma^{-2}}t - \gamma\frac{v}{c^2}\cdot\frac{1}{\gamma}x' && \text{Sievennä} &&\\
& & &= \frac{1}{\gamma}t - \frac{v}{c^2}x' && \text{Ratkaise nyt } t &&\\
& \Rightarrow & t &= \gamma(t' + vx'/c^2), && \text{Nyt } t \text{ ratkaistu, tarvitaan vielä } x && (5b)\\
& & & && \text{Sij. } t \text{ kaavaan (5a)} &&\\
&(5a) \quad \Rightarrow \quad & x &= \frac{1}{\gamma}x' + v\cdot\gamma(t' + vx'/c^2) && \text{Kerää yhteiset tekijät} &&\\
& & &= \left(\frac{1}{\gamma} + \gamma\frac{v^2}{c^2}\right)x' + \gamma vt' && &&\\
& & &= \gamma\underbrace{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2}\right)}_{=1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}=1}x' + \gamma vt' && \text{Sievennä} &&\\
& & &= \gamma(x' + vt') && \text{Nyt } x \text{ valmis, kaikki tehty!} && (5c)
\end{aligned}
$$

Kaavassa (5b) saatiin t koordinaattien t' ja x' avulla, ja kaavassa (5c) saatiin sama x:lle. Kootaan tulokset:

$$x = \gamma(x' + vt') \tag{6a}$$
$$y = y' \tag{6b}$$
$$z = z' \tag{6c}$$
$$t = \gamma(t' + vx'/c^2) \tag{6d}$$

Eli käänteismuunnos (6) on sama kuin alkuperäinen muunnos (3), paitsi että v:n merkki on kääntynyt. Ja näinhän sen tietenkin täytyy olla!

(b) Aloitetaan laskemalla $\Delta x'$.

$$
\begin{aligned}
\Delta x' &= x'_2 - x'_1 && \text{Lorentz: } x'_{1,2} = \gamma(x_{1,2} - vt_{1,2})\\
&= \gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1) && \text{Ota yhteinen tekijä, ryhmittele } t\text{:t ja } x\text{:t yhteen}\\
&= \gamma(\underbrace{x_2 - x_1}_{=\Delta x}\underbrace{-vt_2 + vt_1}_{=-v\Delta t})\\
&= \gamma(\Delta x - v\Delta t). && \text{OK!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta t' &= t'_2 - t'_1 && \text{Lorentz: } t'_{1,2} = \gamma(t_{1,2} - vx_{1,2}/c^2)\\
&= \gamma(t_2 - vx_2/c^2) - \gamma(t_1 - vx_1/c^2) && \text{Ota yhteinen tekijä, ryhmittele } t\text{:t ja } x\text{:t yhteen}\\
&= \gamma(\underbrace{t_2 - t_1}_{=\Delta t}\underbrace{-vx_2/c^2 + vx_1/c^2}_{=-v\Delta x/c^2})\\
&= \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2). && \text{OK!}
\end{aligned}
$$

Yhdessä:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t), \tag{7a}$$
$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2). \tag{7b}$$

(c) Suureen $(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ muuttumattomuus tarkoittaa siis sitä, että

$$c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2. \tag{8}$$

Sijoitetaan kaavan (7) lausekkeet kaavan (8) oikealle puolelle:

$$\begin{aligned}
(\Delta s')^2 &= c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 \\
&= c^2\gamma^2(\Delta t - v\Delta x/c^2)^2 - \gamma^2(\Delta x - v\Delta t)^2 \\
&= \gamma^2\left[c^2(\Delta t)^2 - \cancel{2c^2(\Delta t)v(\Delta x)/c^2} + c^2v^2(\Delta x)^2/c^4 - (\Delta x)^2 + \cancel{2v(\Delta t)(\Delta x)} - v^2(\Delta t)^2\right] \\
&= \gamma^2\left[\underbrace{(c^2 - v^2)}_{=c^2\gamma^{-2}}(\Delta t)^2 + \underbrace{\left(-1 + \frac{v^2}{c^2}\right)}_{=-\gamma^{-2}}(\Delta x)^2\right] \\
&= c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2.
\end{aligned}$$

Eli $(\Delta s)^2$ säilyy muuttumattomana Lorentz muunnoksissa.

3. Lorentzin muunnos numeerisesti

(a) Annetut arvot:

$$x' = 1\ \text{km}, \quad t' = 0, \quad v = 300\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Lorentz-muunnos:

$$x = \gamma(x' + vt'), \qquad t = \gamma(t' + vx'/c^2),$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Sijoitetaan numeeriset arvot näihin kaavoihin:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{300\ \text{m/s}}{3\cdot 10^8\ \text{m/s}}\right)^2}}(1000\ \text{m} + 0) \approx \underline{\underline{1000.0000000005\ \text{m.}}} \\
t &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{300\ \text{m/s}}{3\cdot 10^8\ \text{m/s}}\right)^2}}\left(0 + \frac{300\ \text{m/s}}{(3\cdot 10^8\ \text{m/s})^2}\cdot 1000\ \text{m}\right) \approx \underline{\underline{3.333333333335\cdot 10^{-12}\ \text{s.}}}
\end{aligned}$$

Paikkakoordinaatti muuttuu vain noin puolen nanometrin verran, aikakoordinaatti muutoman pikosekunnin! Monet laskimet eivät pääse ylläolevaan tarkkuuteen.
Galilei-muunnos:

$$x = x' + vt', \qquad t = t'.$$

Tällä saadaan

$$\begin{aligned}
x &= 1000\ \text{m} + 300\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 0 = \underline{\underline{1000\ \text{m}}} \\
t &= \underline{\underline{0.}}
\end{aligned}$$

Tämä on käytännössä ihan sama kuin suhteellisuusteorian antama tulos.

(b) Nopeus nostetaan nyt $v = 0.2c$:hen. Sijoitus:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\sqrt{1 - 0.2^2}}(1000\ \text{m} + 0) \approx \underline{\underline{1020.62\ \text{m.}}} \\
t &= \frac{1}{\sqrt{1 - 0.2^2}}\left(0 + \frac{0.2}{3\cdot 10^8\ \text{m/s}}\cdot 1000\ \text{m}\right) \approx \underline{\underline{6.804\cdot 10^{-7}\ \text{s.}}}
\end{aligned}$$

Galilei antaa saman kuin edellisessä kohdassa. Suhteellisuusteorian antama korjaus on kymmenien metrien / mikrosekunnin luokkaa. Joissain tilanteissa tämä voi olla jo merkittävä ero.

(c) Annetut arvot:

$$x' = 0, \quad t' = 3 \cdot 10^7 \text{ s}, \quad v = \frac{1}{5}c.$$

Lorentz:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{1-0.2^2}}\left(0 + 0.2 \cdot 3 \cdot 10^8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3 \cdot 10^7 \text{ s}\right) \approx \underline{\underline{1.837 \cdot 10^{12} \text{ km.}}} \\ t &= \frac{1}{\sqrt{1-0.2^2}}\left(3 \cdot 10^7 \text{ s} + 0\right) \approx \underline{\underline{3.0619 \cdot 10^7 \text{ s.}}} \end{aligned}$$

Galilei:

$$\begin{aligned} x &= 0 + 0.2 \cdot 3 \cdot 10^8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3 \cdot 10^7 \text{ s} = \underline{\underline{1.8 \cdot 10^{12} \text{ km,}}} \\ t &= t' = \underline{\underline{3 \cdot 10^7 \text{ s.}}} \end{aligned}$$

4. Annetut arvot:

$$\begin{aligned} \Delta t &= 1 \text{ h} & \qquad \Delta t' &= 2 \text{ h} = 2\Delta t \\ \Delta x &= 0 \text{ m} & \qquad \Delta x' &= ? \end{aligned}$$

Tuntemattomia on siis $\Delta x'$, jota kysytään, ja koordinaatistojen välinen nopeus v, jota tarvitaan Lorentz-muunnoksissa.

Muunnoskaavat antaa kaksi yhtälöä, joista tuntemattomat voi ratkaista:

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2), \tag{9a}$$
$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t). \tag{9b}$$

Koska $\Delta x = 0$ ja $\Delta t' = 2\Delta t$, saadaan ensimmäisestä

$$\begin{aligned} & 2\Delta t = \gamma \Delta t \\ \Rightarrow \quad & \gamma = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 2 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4} \\ \Rightarrow \quad & v = \underline{\underline{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}c.}} \end{aligned}$$

Kaavasta (9b) puolestaan tulee

$$\begin{aligned} \Delta x' &= -\gamma v \Delta t = \mp 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} c \cdot \Delta t = \mp\sqrt{3} c \Delta t \\ &\approx \underline{\underline{\mp 1.87 \cdot 10^{12} \text{ m.}}} \end{aligned}$$

Ongelmaa voidaan toisaalta lähestyä myös kohdan 2(c) tuloksen avulla. Koska

$$c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2,$$

saadaan $\Delta x'$:ksi suoraan

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \pm\sqrt{c^2[(\Delta t')^2 - (\Delta t)^2] + (\Delta x)^2} \\ &= \pm c\sqrt{(2\Delta t)^2 - (\Delta t)^2} = \pm\sqrt{3} c \Delta t \end{aligned}$$