1. **Ajan venyminen** Olkoon Δt aika, joka on kulunut maassa, ja $\Delta\tau$ lentokoneessa olevan kellon mittaama aika. Ajan venymisen vuoksi aika $\Delta\tau$ on lyhyempi, ja se saadaan kaavasta

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}. \tag{1}$$

Paikallaan olevan havaitsijan mukaan lentokoneessa on kulunut aikaa sekunti vähemmän, eli

$$\Delta\tau = \Delta t - 1\ \mathrm{s} \overset{\text{Kaava (1)}}{=} \Delta t\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Ratkaistaan tästä Δt:

$$\Delta t = \frac{1\ \mathrm{s}}{1-\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Koska tässä $v = 300$ m/s $\ll c$, käytetään Taylorin sarjaa $\sqrt{1-v^2/c^2}$:n laskemiseksi. Taylorin sarjan avulla lauseketta on helpompi käsitellä, ja lisäksi, monien laskimien tarkkuus ei riitä erottamaan sitä luvusta 1. Luentomonisteen lopussa on esitetty tarvittava kaava, $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$ kun x on pieni, jonka avulla saadaan

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}.$$

Eli,

$$\Delta t \approx \frac{1\ \mathrm{s}}{1-(1-(1/2)v^2/c^2)} = 2\frac{1\ \mathrm{s}}{v^2/c^2} = \underline{\underline{2\cdot 10^{12}\ \mathrm{s}}},$$

joka on reilu 63000 vuotta.

2. **Nopeat opiskelijat** Tarkastellaan tapahtumia lasersäteen lähtö ja lampun syttyminen. Opiskelijalle K paikkaero $\Delta x = 1\ \mathrm{m} = c\Delta t$, koska säde liikkuu valon nopeudella. Oletetaan nyt, että K:n suhteen liikkuvassa koordinaatistossa aikaero on $\Delta t' = a\Delta t$, missä $a = 1/2$ opiskelijalle L, ja $a = 2$ opiskelijalle M.

Käytetään Lorenz-muunnosten kaavaa $\Delta t'$:lle:

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - (v/c^2)\Delta x). \tag{2}$$

Sijoitetaan $\Delta x = c\Delta t$ ja $\Delta t' = a\Delta t$:

$$a\Delta t = \gamma(\Delta t - (v/c)\Delta t).$$

Jaetaan puolittain Δt:llä, sijoitetaan γ:n määritelmä $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$, ja merkitään $v/c = \beta$:

$$a = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Tästä saisi toisen asteen yhtälön β:lle korottamalla lausekkeen puolittain toiseen, ja kertomalla $(1-\beta^2)$:lla, mutta tässä kannattaa olla hieman ovelampi[1]. Muistetaan, että $1-\beta^2 = (1-\beta)(1+\beta)$ ja $1-\beta = \sqrt{1-\beta}\sqrt{1-\beta}$. Tällöin,

$$a = \frac{\cancel{\sqrt{1-\beta}}\sqrt{1-\beta}}{\cancel{\sqrt{1-\beta}}\sqrt{1+\beta}} = \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}}.$$

Korotetaan nyt lauseke puolittain toiseen, ja ratkaistaan β:

$$a^2 = \frac{1-\beta}{1+\beta} \quad\Rightarrow\quad (1+\beta)a^2 = 1-\beta \quad\Rightarrow\quad (a^2+1)\beta = 1-a^2$$

Eli

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{1-a^2}{1+a^2}.$$

[1] Ei haittaa, jos et hoksannut tätä aluksi. Seuraavalla kerralla, kun näet vastaavan lausekkeen, voit olla viekkaampi!

Sijoitetaan vain a:n arvot. Opiskelijalle L $a = 1/2$, eli

$$\frac{v}{c} = \frac{1 - 1/4}{1 + 1/4} = \frac{3/4}{5/4} = \underline{\underline{\frac{3}{5}}},$$

ja M:lle $a = 2$, eli

$$\frac{v}{c} = \frac{1-4}{1+4} = \underline{\underline{-\frac{3}{5}}}.$$

Eli L:n nopeus on $3c/5$ ja M:n $-3c/5$!

3. **Majakan ohitus**

(a) Aluksella, aluksen pituus on $\ell = 300$ m, ja valon nopeus c. Näinollen, signaali saapuu moottoreihin hetkella

$$\ell/c = 300 \text{ m}/c = 1 \times 10^{-6} \text{ s} = \underline{\underline{1\ \mu\text{s.}}}$$

(b) Helpointa lienee Lorenz-muuntaa aluksen koordinaatiston tapahtuma majakan koordinaatistoon. Aluksessa $x = -\ell = -300$ m ja $t = \ell/c = 1\ \mu$s, majakan nopeus $v = -0.8c$. Lorenz:

$$t' = \gamma(t - (v/c^2)x).$$

Nyt, koska $v = 4c/5$, on $\gamma = 1/\sqrt{1 - 16/25} = 1/\sqrt{9/25} = 5/3$. Saadaan

$$t' = \frac{5}{3}(\ell/c - (4/5)\ell/c) = \frac{5}{3}\frac{1}{5}\frac{\ell}{c} = \frac{1}{3}\frac{\ell}{c} \approx \underline{\underline{0.33\ \mu\text{s.}}}$$

(c) Aluksen koordinaatistossa perä ohittaa majakan paikassa $x = -\ell$ hetkellä $t = \ell/(4c/5)$. Lorenz:

$$t' = \frac{5}{3}(5\ell/(4c) - 4\ell/(5c)) = \frac{5}{3}\left(\frac{5}{4} - \frac{4}{5}\right)\frac{\ell}{c} = \frac{5}{3}\frac{25-16}{20}\frac{\ell}{c} = \frac{5}{3}\frac{9}{20}\frac{\ell}{c} = \frac{3}{4}\frac{\ell}{c} = \underline{\underline{0.75\ \mu\text{s.}}}$$

Ongelman voisi ratkaista myös suoraan majakan koordinaatistossa, jossa alus liikkuu nopeudella $v = 4c/5$. Tällöin mjakasta katsottuna alus lyhenee Lorentz-kontraktion mukaisesti:

$$l' = \frac{l}{\gamma} = \frac{3}{5}l.$$

Tällöin kulunut aika on

$$t' = \frac{l'}{v} = \frac{3}{5}l \times \frac{5}{4c} = \frac{3}{4}\frac{l}{c}.$$

Siis saadaan täsmälleen sama tulos kuin lähtemällä aluksen koordinaatistosta ja siirtymällä majakan koordinaatistoon Lorentz-muunnoksella. *Lukijan on hyvä kumminkin miettiä, minkä takia nyt voidaan käyttää Lorentz-kontraktiota.*

4. **Minkowskin diagrammi**

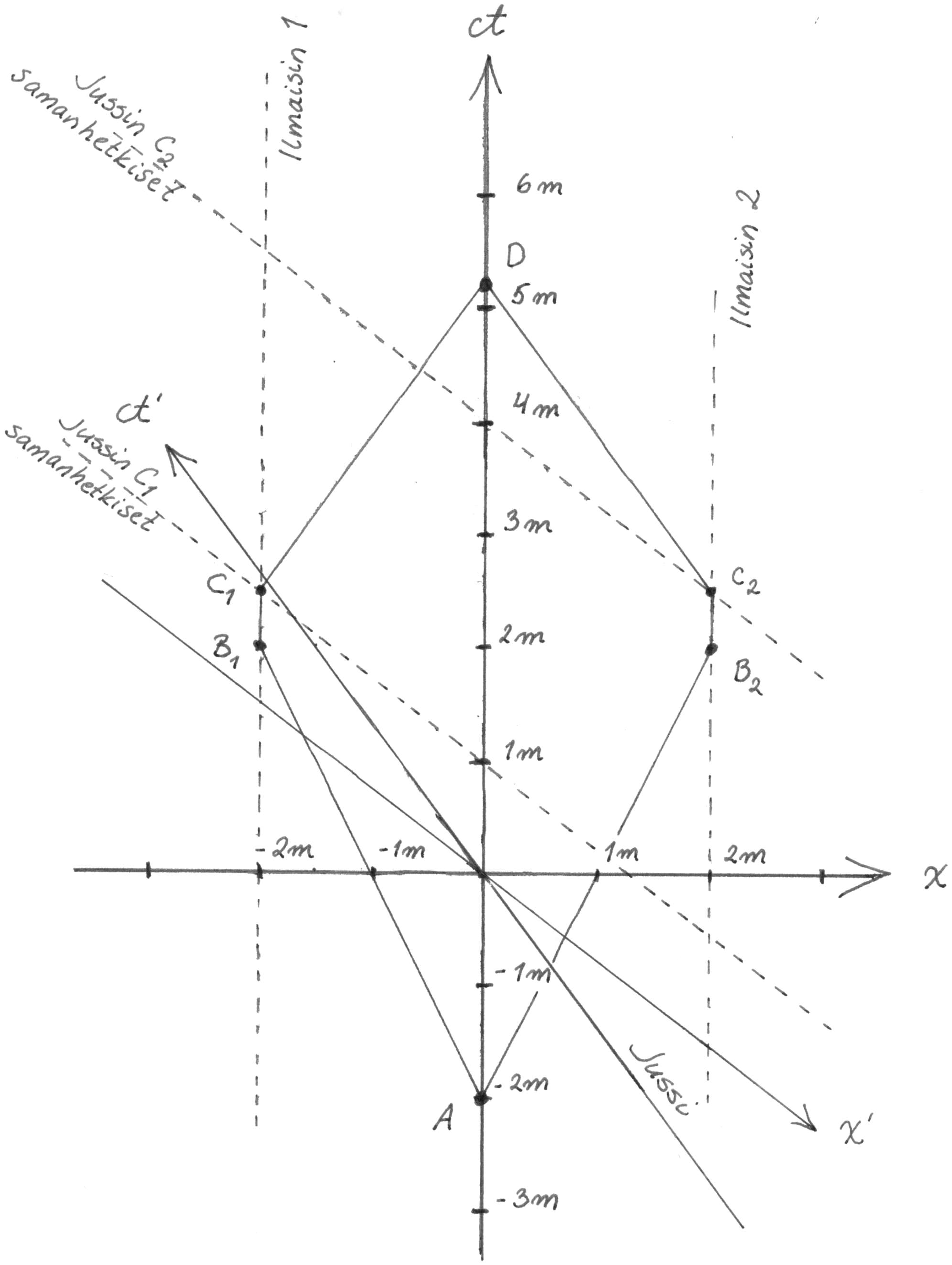
(a) Diagrammi on esitetty kuvassa 1. Hiukkaset emittoituvat pisteessä A. Pisteissä B_1 ja B_2 hiukkaset saapuvat ilmaisimiin 1 ja 2. Viiveen jälkeen signaalit lähtevät takaisin pisteistä C_1 ja C_2. Pisteessä D signaalit ovat palanneet pisteeseen $x = 0$.

Ohjeita diagrammin piirtämiseen: Nopeudella $0.5c$ kulkeva hiukkanen siirtyy 1 m ajassa 1 m$/(0.5c)$ = 2 m$/c$, eli ct:ssä 2 m. Siten maailmanviivan kulmakerroin (x, ct) koordinaatistossa on 2. Vastaavasti nopeudella $0.75c$ liikkuvan hiukkasen maailmanviivan kulmakerroin on $1/0.75 = 4/3$. Paikallaan pysyvien pisteiden maailmanviivat ovat pystysuoria viivoja (esimerkiksi ilmaisimet tehtävän diagrammissa).

(b) Koska ilmaisimet ovat levossa Outolemmen suhteen, on myös aika, joka signaaleilta kuluu, suoraan verrannollinen niiden etäisyyteen. Huomaa, että liikkuvalle havaitsijalle signaalit lähtevät eri aikaan ((c) kohta).

(c) Kts. (a) kohdan diagrammi. Jussin maailmanviiva on K' koordinaatiston ct akseli, joka on siten suora, jonka kulmakerroin on $-1/0.75$. Esitettynä (x, ct) koordinaatistossa, jossa molempien akselien yksikkö on sama, x' akselin kulma x akselista on sama kuin ct' akselin kulma ct akselista. Siten x' akseli on suora, jonka kulmakerroin on -0.75.

Minkä tahansa koordinaatiston samanhetkiset tapahtumat ovat suorilla, jotka ovat x akselin suuntaisia. Tohtorin tapauksessa C_1 ja C_2 ovat siten samanhetkisiä. Jussille tilanne on toinen. Kuvaan on hahmoteltu Jussin C_1:n ja C_2 kanssa samanhetkiset tapahtumat piirtämällä viivat, jotka kulkevat näiden pisteiden läpi ja jotka ovat x':n suuntaisia. Selvästi, C_1 on lähempänä $ct' = 0$:aa kuin C_2, joten se tapahtuu Jussille ensin.



Kuva 1: Minkowskin diagrammi