1. **Valoa nopeampi liike**

(a) Sekunnissa kuvan 1(a) aaltorintama etenee 10 m. Samassa ajassa rannan ja aallon leikkauspiste etenee matkan s. Kulman θ sini on $\sin\theta = 10\ \mathrm{m}/s$, ja tästä saadaan nopeus v jolla leikkauspiste etenee:

$$s = \frac{10\ \mathrm{m}}{\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{s}{1\ \mathrm{s}} = \underline{\underline{\frac{10\ \mathrm{m/s}}{\sin\theta}}}.$$

Kun θ menee kohti nollaa, myös $\sin\theta$ lähestyy nollaa, ja siten v lähestyy ääretöntä. Leikkauspiste voi siis edetä mielivaltaisen nopeasti, valoakin nopeammin.

Tietoa ei näin kuitenkaan voi siirtää. Jos esimerkiksi rannalla seisova Albert yrittäisi siirtää tietoa kauempana rannalla odottavalle Bertalle, tulisi Albertin pystyä muuttamaan aaltorintman kulkua jollain tavalla. Mutta nyt aaltoon pitäisi pystyä vaikuttamaan valoa nopeammin, jotta aaltorintamaa hyödyntävä valoa nopeampi tiedonsiirto onnistuisi!

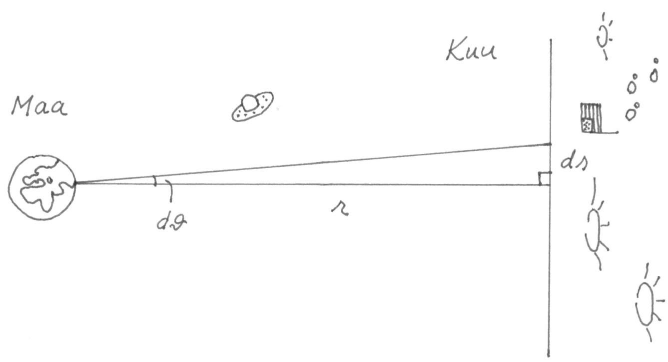
(b) Tilanne on esitetty kuvassa 1(b). Kun pointterin kulma muuttuu $\mathrm{d}\theta$:n verran, siirtyy piste kuun pinnalla $\mathrm{d}s$:n verran. Kun $\mathrm{d}\theta$ on hyvin pieni, voidaan $\mathrm{d}s$:ää arvioida $\mathrm{d}\theta$:a vastaavan ympyrän kaaren pituutena: $\mathrm{d}s = r\mathrm{d}\theta$. Jaetaan tämä pienellä ajalla $\mathrm{d}t$:

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}_{=v} = r\,\underbrace{\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}}_{=\omega} \quad \Rightarrow \quad v = r\omega = 384000\ \mathrm{km} \times 3\ \frac{1}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{1152000\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}},$$

joka on suurempi kuin valon nopeus.

Kuten edellisessä kohdassa, tietoa ei voi näin siirtää. Tiedonsiirron tulisi tapahtua kuun pinnalla, ja tämä puolestaan edellyttäisi sitä, että pointterista lähtenyttä valoa pitäisi kuusta käsin pystyä manipuloimaan valoa nopeammin.

(a) Rantaan törmäävä aaltorintama.



(b) Kuu ja sen pintaan osuva lasersäde.

2. **Tapahtumaparit** Tulee siis laskea Δs^2 annetuille tapahtumille,

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = (ct_B - ct_A)^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2.$$

Väite i) sanoo, että on koordinaatisto, jossa tapahtumat ovat samanaikaisia. Tämä voidaan testata käyttämällä Δs^2:n invarianssia. Sen arvo on sama kaikissa koordinaatistoissa, joten

$$\Delta s^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2,$$

missä pilkulliset suureet ovat lausuttu jossain toisessa inertiaalikoordinaatistossa. Erityisesti, koordinaatistossa, jossa tapahtumat ovat samanhetkisiä, on $\Delta t' = 0$ ja $\Delta s^2 = -\Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 < 0$. Jotta i) olisi totta, tulee Δs^2:n olla *negatiivinen.*

Väitteessä ii) puolestaan haetaan koordinaatistoa, jossa tapahtumat ovat samanpaikkaisia. Kuten edellä, tällöin on oltava inertiaalikoordinaatisto, jossa $\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0$ ja näin $\Delta s^2 = c^2\Delta t'^2$. Tämä on aina suurempi kuin nolla, eli jotta ii) olisi totta, on Δs^2:n oltava *positiivinen.*

(a)

$$\Delta s^2 = (4-0)^2 - (3-0)^2 - (2-0)^2 - (1-0)^2 = \underline{\underline{2.}}$$

Koska tämä on positiivinen, ei ole olemassa koordinaatistoa, jossa tapahtumat olisivat samanhetkisiä, mutta on sellainen, jossa tapahtumat ovat samanpaikkaisia. Siis väite i) epätosi, ii) tosi.

(b)

$$\Delta s^2 = (3-1)^2 - (3-1)^2 - (2-1)^2 - (1-1)^2 = \underline{\underline{-1.}}$$

Tämä on negatiivinen. On siis koordinaatisto, jossa tapahtumat ovat samanhetkisiä, mutta ei sellaista, jossa ne ovat samanpaikkaisia. Väite i) tosi, ii) epätosi.

(c)

$$\Delta s^2 = (3-(-2))^2 - (0-4)^2 - (-1-2)^2 - (2-2)^2 = \underline{\underline{0.}}$$

Koska $\Delta s^2 = 0$, voi vain valonsäde yhdistää tapahtumat. Näinollen tarvittaisiin koordinaatisto, joka kulkee valon nopeudella, jotta tapahtumat voisivat olla samanhetkisiä tai -paikkaisia. Väitteet i) ja ii) ovat siis epätosia.

Huom! Jos $\Delta s^2 > 0$, sanotaan sitä *ajanlaatuiseksi.* Tällöin on olemassa koordinaatisto, jossa tapahtumat ovat *samanpaikkaisia.* Jos $\Delta s^2 < 0$, sanotaan sitä *paikanlaatuiseksi.* Tällöin on olemassa koordinaatisto, jossa tapahtumat ovat *samanaikaisia.*

Voit ajatella tämän näin: Jos Δs^2:een voi laittaa pelkää paikkaa (ei aikaa), on se paikanlaatuinen. Jos Δs^2:een voi laittaa pelkkää aikaa (ei paikkaa), on se ajanlaatuinen.

Huom! Ratkaisun alussa esitetty tarkastelu voidaan tehdä hieman tarkemmin. Tarkastellaan ensiksi tilannetta $\Delta s^2 > 0$. Tällöin

$$\Delta s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} < c.$$

Nyt voidaan valita uusi koordinaatisto, joka liikkuu alkuperäiseen koordinaatistoon nähden nopeudella

$$v := \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

ja edellisen tarkastelun nojalla tämä on mielekästä, sillä $v < c$. Nyt Lorentz-muunnoksella saadaan

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = 0,$$

kun muunnokseen käytetään valittua nopeutta. Siis ollaan löydetty koordinaatisto, jossa tapahtumat ovat *samanpaikkaisia.* Koordinaatistoa, missä tapahtumat ovat samanaikaisia, ei ole olemassa ratkaisun alun päättelyllä. Sama saadaan edellisellä päättelllä, sillä uuden koordinaatiston, jossa tapahtumat olisivat samanaikaisia, nopeus pitäisi olla

$$v' := \frac{\Delta t}{\Delta x}c^2.$$

Kun käyttää s^2:n lausekkeesta saatua epäyhtälöä, nähdään $v' > c$. Tämä ei ole mahdollista suhteellisuusteorian postulaatin nojalla.

Tapaus $s^2 < 0$ käsitellän samaan tapaan. Nyt saadaan

$$\Delta s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 < 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} > c.$$

Tällöin voidaan valita nopeudeksi

$$v := \frac{\Delta x}{\Delta t} c^2,$$

joka on edellä johdetun epäyhtälön nojalla alle valonnopeus (tarkista itse). Lorentz-muunnos antaa

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x) = 0,$$

kun sovelletaan valittua nopeutta. Siis löydetään koordinaatisto, jossa tapahtumat ovat samanaikaisia. Koordinaatistoa, jossa tapahtumat olisivat samanpaikkaisia, ei voi löytää, sillä koordinaatiston nopeus pitäisi olla yli valonnopeuden.

3. **Kaksosparadoksi** Katso kuva 1.

(a) Olkoon Δt_K yhdensuuntaiseen matkaan kulunut aika K:n mielestä, $v = 4c/5$ L:n nopeus, ja $d = 4ca$ matka α-Centauriin. Nyt

$$\Delta t_K = \frac{d}{v} = \frac{4ca}{4c/5} = \underline{\underline{5a.}}$$

(b) Olkoon Δt_L yhdensuuntaiseen matkaan kulunut aika L:n mielestä. Matkustajan aika kuluu hitaammin maan näkökulmasta, joten

$$\Delta t_L = \frac{1}{\gamma}\Delta t_K.$$

Tässä $\gamma = 1/\sqrt{1-(4/5)^2} = 5/3$, joten

$$\Delta t_L = \frac{3}{5}\Delta t_K = \frac{3}{5} \cdot 5a = \underline{\underline{3a.}}$$

(c) Matka-aika K:lle on $2\Delta t_K = 10a$, ja L:lle $2\Delta t_L = 6a$. Ikäeroa on kertynyt siis $\underline{\underline{4a}}$!

(d) Olkoon $\Delta t'_L$ maassa kulunut aika L:n koordinaatistossa. Koska L:n mielestä Maa liikkuu nopeudella v, kulkee Maan aika L:lle hitaammin. Ajan venymä:

$$\Delta t'_L = \frac{1}{\gamma}\Delta t_L \quad \Rightarrow \quad \Delta t'_L = \frac{3}{5} \cdot 3a = 1\frac{4}{5}a.$$

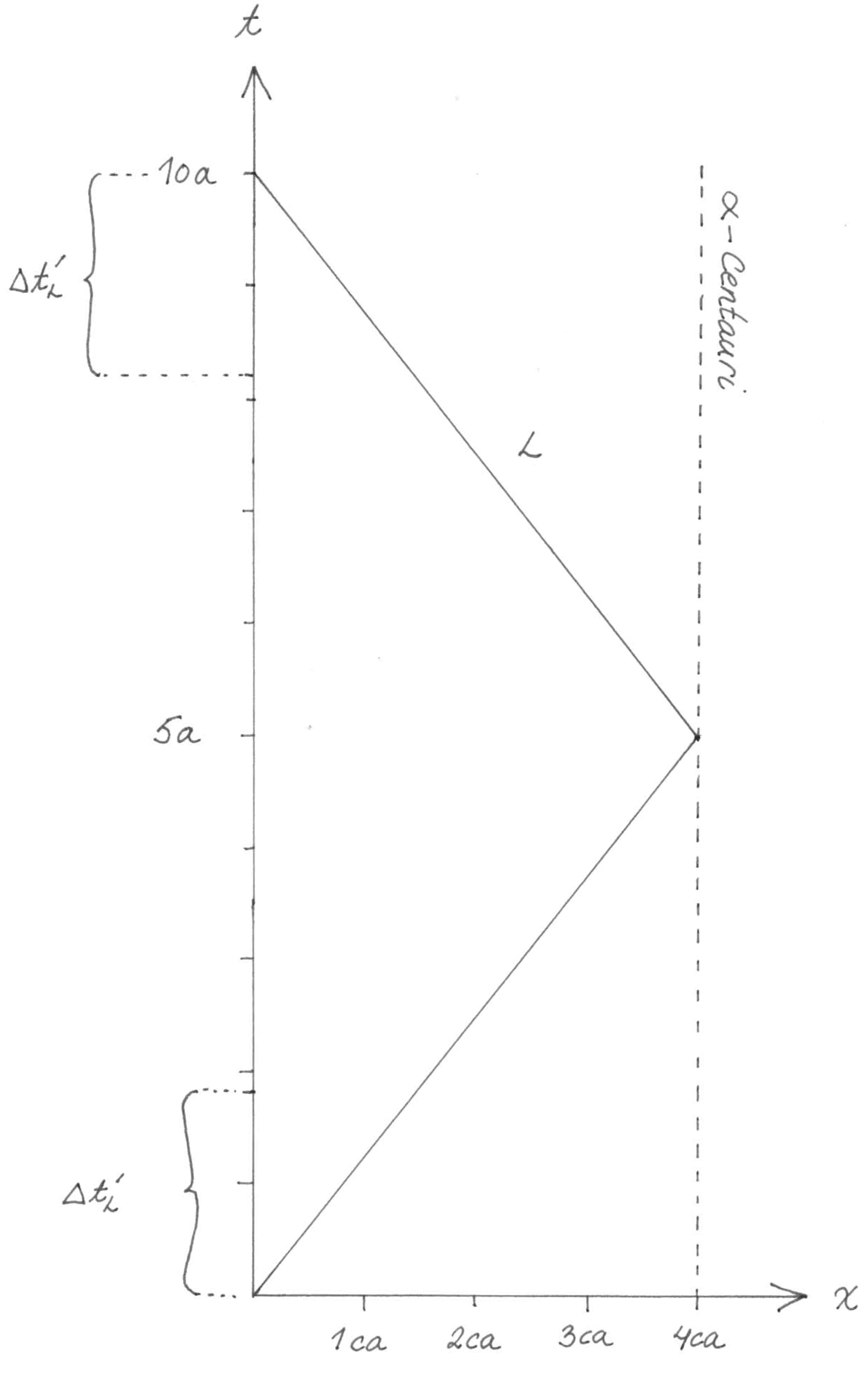
L:lle K on vanhentunut vain 1 4/5 = $\underline{\underline{1.8}}$ vuotta!

(e) Edellisestä kohdasta, meno- ja paluu matkoilla K vanhenee yhteensä $2\Delta t'_L = 3.6a$. K oli kokonaisuudessaan vanhentunut $10a$. Käännöksen aikana K siis vanhenee kokonaiset $(10 - 3.6)a = \underline{\underline{6.4a}}$!

4. **Ladaparadoksi** Olkoon ℓ_{Lada} ja ℓ_{Talli} Ladan ja tallin pituudet lepokoordinaatistoissaan, $\ell_{\text{Lada}} = 4$ m, $\ell_{\text{Talli}} = 3$ m. Ladan nopeus $v = 4c/5$, ja siten $\gamma = 5/3$.

(a) Olkoon ℓ'_{Lada} Ladan pituus Nikolain koordinaatistossa.

$$\ell'_{\text{Lada}} = \frac{1}{\gamma}\ell_{\text{Lada}} = \frac{3}{5} \cdot 4 \text{ m} = \underline{\underline{2.4 \text{ m.}}} \qquad \text{Pienempi kuin } \ell_{\text{Talli}}!$$



Kuva 1: Kaksosparadoksi.

(b) Kun Lada on sisällä, sillä on enää matka $\ell_{\text{Talli}} - \ell'_{\text{Lada}}$ kuljettavana ennen seinää. Siten aikaa tuhoon on

$$t = \frac{\ell_{\text{Talli}} - \ell'_{\text{Lada}}}{v} = \frac{0.6\text{ m}}{0.8c} = \underline{\underline{2.5 \cdot 10^{-9}\text{ s},}}$$

eli vaivaiset 2.5 nanosekuntia.

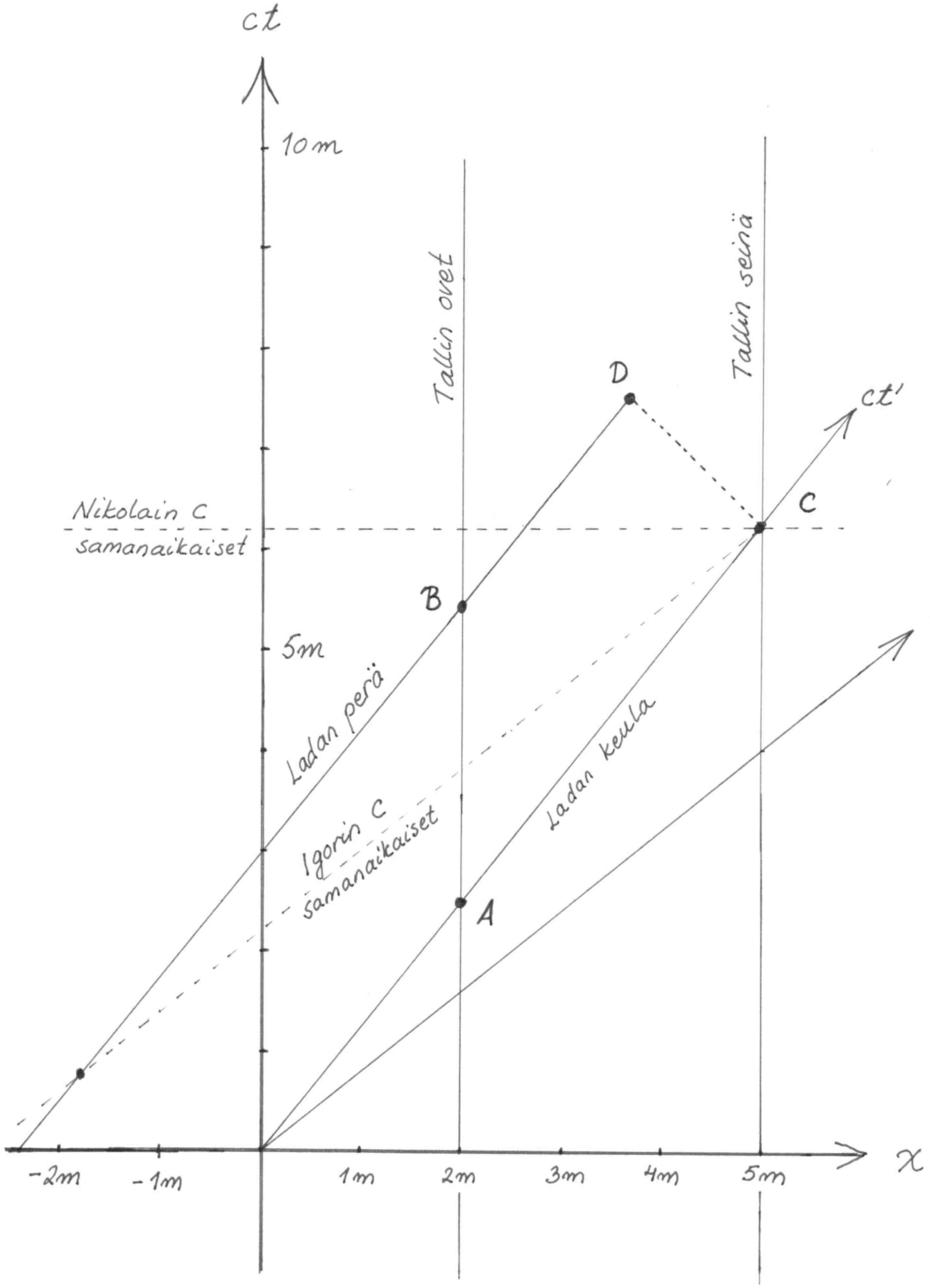
(c) Olkoon ℓ'_{Talli} tallin pituus Igorin mielestä. Talli lähestyy Igoria nopeudella $v = 0.8c$ ja on siten kutistunut:

$$\ell'_{\text{Talli}} = \frac{1}{\gamma}\ell_{\text{Talli}} = \frac{3}{5} \cdot 3\text{ m} = \underline{\underline{1.8\text{ m.}}} \qquad \text{Pienempi kuin } \ell_{\text{Lada}}!$$

Lada on yhä ℓ_{Lada}:n mittainen Igorille, siis $\underline{\underline{4\text{ m}}}$.

(d) Diagrammi on kuvassa 2. Paradoksin selittää samanaikaisuuden suhteellisuus. Toisin sanoen, tapahtumien järjestys voi olla eri eri havaitsijoille. Siinä missä tapahtumat tulevat Nikolaille järjestyksessä ABC, on järjestys Igorille ACB!

(e) Tieto keulan törmäyksestä ei siirry äärettömän nopeasti Ladan perään. Siispä perä on autuaan tietämätön odottavasta kohtalosta ainakin siihen hetkeen, kun valo törmäyksestä kohtaa perän maailmanviivan (piste D kuvassa).



Kuva 2: Ladaparadoksi.