1. **Aberraatio suhteellisuusteoriassa** a) Tulkoon valo kuten tehtävän kuvassa (x,y)-tason $x,y>0$ neljänneksestä:
$$\boldsymbol{u} = u_x\hat{\boldsymbol{x}} + u_y\hat{\boldsymbol{y}} = -c\cos\theta\ \hat{\boldsymbol{x}} - c\sin\theta\ \hat{\boldsymbol{y}}. \tag{1}$$
Lorenz muunnos nopeuksille antaa nopeuden $\boldsymbol{u}' = u'_x\hat{\boldsymbol{x}} + u'_y\hat{\boldsymbol{y}}$ koordinaatistossa K':
$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, \qquad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-vu_x/c^2}.$$
Sijoitetaan u_x ja u_y kaavasta (1):
$$u'_x = \frac{-c\cos\theta - v}{1 - vu_x/c^2} \tag{2a}$$
$$u'_y = \frac{-c\sin\theta\ \sqrt{1-v^2/c^2}}{1-vu_x/c^2} \tag{2b}$$
Toisaalta, $\boldsymbol{u}'$ voidaan esittää kulman θ' avulla (vertaa kaava (1)):
$$u'_x = -c\cos\theta', \qquad u'_y = -c\sin\theta'. \tag{3}$$
Kaavoista (2) ja (3) saadaan kulman θ' tangentti:
$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta'}{\cos\theta'} \overset{(3)}{=} \frac{u'_y}{u'_x} \overset{(2)}{=} \underline{\underline{\frac{c\sin\theta\ \sqrt{1-v^2/c^2}}{c\cos\theta + v}}}. \tag{4}$$
b) Luentomonisteen alussa annettiin kaava aberraation vaatimalle korjauskulmalle α:
$$\alpha = \frac{v}{c}.$$
Yksinkertaisuuden vuoksi oli oletettu, että tarkasteltava tähti on suoraan ratatason yläpuolella, eli $\theta = 90°$. Maan rataliikkeen nopeus on pieni verrattuna valon nopeuteen, $v/c \ll 1$, joten voimme arvioida $\sqrt{1-v^2/c^2} \approx 1$. Aberraation kaavasta (4) saadaan näillä arvoilla:
$$\tan\theta' \approx \frac{c}{v}.$$
Koska nopeus v oli suhteellisen pieni, on myös kulma θ' lähellä θ:a. Merkitään $\theta' = 90° + \eta$, missä η on pieni, jolloin tangentiksi saadaan
$$\tan\theta' = \frac{\sin(90° + \eta)}{\cos(90° + \eta)} = \frac{\cos\eta}{-\sin\eta} \approx -\frac{1}{\eta}.$$
Edellä käytettiin tietoa $\cos x \approx 1$, $\sin x \approx x$ kun x pieni. Ratkaistaan lopulta korjaus η:
$$\tan\theta' \approx -\frac{1}{\eta} = \frac{c}{v} \quad \Rightarrow \quad \eta = -\frac{v}{c} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha = |\eta| = \frac{v}{c}.}}$$
Korjauksen suuruus on siis $\alpha = |\eta| = v/c$, niin kuin pitikin.

2. **Vakiovoima** (i) Nopeus ajan funktiona. Lähdetään luentojen kaavasta
$$\frac{m\boldsymbol{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \boldsymbol{f}t.$$
Vektorit $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{f}$ ovat samaan suuntaan, joten merkitään $\boldsymbol{u} = u\hat{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{f} = f\hat{\boldsymbol{x}}$. Saadaan
$$\frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = ft \quad \Rightarrow \quad \frac{m^2u^2}{1-u^2/c^2} = f^2t^2$$

$$\Rightarrow \quad m^2u^2 = (1-u^2/c^2)f^2t^2 = f^2t^2 - f^2t^2u^2/c^2 \quad \Rightarrow \quad m^2u^2 + f^2t^2u^2/c^2 = f^2t^2$$

$$\Rightarrow \quad (m^2 + f^2t^2/c^2)u^2 = f^2t^2 \quad \Rightarrow \quad u^2 = \frac{f^2t^2}{m^2 + f^2t^2/c^2} = \frac{1}{m^2/f^2t^2 + 1/c^2}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{u(t) = \frac{1}{\sqrt{(m/ft)^2 + 1/c^2}}.}}$$

Eli saatiin haluttu kaava.

(ii) Hiukkasen paikka. Jotta nopeudesta saadaan paikka, tulee sitä integroida ajassa:

$$x(t) = \int_0^t u(t')\,\mathrm{d}t' = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(m/ft')^2 + 1/c^2}}\,\mathrm{d}t'.$$

Tässä riittää käyttää integroinnin perusmenetelmiä. Erityisesti, sovelletaan kaavaa

$$\int g'(h(t))h'(t)\,\mathrm{d}t = g(h(t)).$$

Kun $h(t) = t^2$, tästä tulee

$$\int g'(t^2)\cdot 2t\,\mathrm{d}t = g(t^2). \tag{5}$$

Tämä on hyvin yleinen tapa integroida monimutkaisempia lausekkeita. Yritetään löytää integrandista helposti integroitava funktio g', jota kertoo g':n argumentin derivaatta.

Huomaa nyt, että

$$u(t) = \frac{t}{\sqrt{(m/f)^2 + t^2/c^2}} = \frac{c}{2}\frac{2t}{\sqrt{(mc/f)^2 + t^2}} = 2t\cdot g'(t^2),$$

missä

$$g'(s) = \frac{c}{2}\frac{1}{\sqrt{(mc/f)^2 + s}}.$$

Esittämällä u muodossa $u = 2tg'(t^2)$, on sen integraali samaa tyyppiä kuin (5). Lisäksi $g'(s)$ on helppo integroida s:n suhteen:

$$g(s) = \int g'(s)\,\mathrm{d}s = \frac{c}{2}\int \frac{1}{\sqrt{(mc/f)^2 + s}}\,\mathrm{d}s = c\sqrt{(mc/f)^2 + s}.$$

Palataan u:n integraaliin:

$$x(t) = \int_0^t 2t'g'(t'^2)\,\mathrm{d}t' = \Big|_0^t g(t'^2) = c\sqrt{(mc/f)^2 + t^2} - c\sqrt{(mc/f)^2} = \underline{\underline{\frac{mc^2}{f}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{ft}{mc}\right)^2} - 1\right].}}$$

Tämä oli tulos, jota haluttiinkin.

(iii) Kun t on pieni, eli tässä kun $ft/mc \ll 1$, voidaan yllä olevan lausekkeen neliöjuuritermiä arvioida sen Taylorin sarjan ensimmäisillä termeillä. Kaavalla $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon/2$ saadaan x:stä seuraavaa:

$$x(t) \approx \frac{mc^2}{f}\left[1 + \frac{f^2t^2}{2m^2c^2} - 1\right] = \frac{mc^2}{f}\frac{f^2t^2}{2m^2c^2} = \underline{\underline{\frac{ft^2}{2m}.}}$$

Tämä noudattaa Newtonin teoriaa. Massa kertaa kiihtyvyys on nyt

$$ma(t) = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{ft^2}{2m} = f \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{ma = f,}}$$

eli tämän x:n antama kiihtyvyys noudattaa Newtonin lakeja.

3. **Nopeus relativistisesti**

Merkitään reaktiossa vapautuvaa energiaa $\Delta E = 782\,\mathrm{KeV}$. Koska massa ja energia ovat ekvivalentteja, kannattaa elektronin massa ilmoitaa energiana ja yksikkö on valittu sopivasti jatkoa ajatellen $E_0 = mc^2 \approx 511\,\mathrm{KeV}$.

Lähdetään liikkeelle kokonaisenergian lausekkeesta:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Tehtävän annon nojalla yhtälön vasenpuoli voidaan kirjoittaa muotoon $E = E_0 + \Delta E$. Näin ollen saadaan yhtälö, josta voidaan ratkaista nopeus.

$$E_0 + \Delta E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$1 + \frac{\Delta E}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$1 + \frac{\Delta E}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{1 + (\frac{\Delta E}{E_0})^2}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{v}{c} = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{(1 + \frac{\Delta E}{E_0})^2}}$$

Sijoittamalla tehtävän alussa esitetyt arvot saatuun nopeuden lausekkeeseen saadaan $v = 0.92c$.

4. **Liikemassan mittaus**

(a) Johdetaan ensiksi liikeyhtälö. Lähdetään liikkeelle yleisestä liikeyhtälöstä:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}.$$

Tämä Newtonin toinen laki pätee tässä muodossa suppeassa suhteellisuusteoriassa. Nyt

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_{\mathrm{rel}}\mathbf{u}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma m\mathbf{u}) = \gamma m\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = m_{\mathrm{rel}}\mathbf{a}$$

eli saadaan tutun näköinen liikeyhtälö

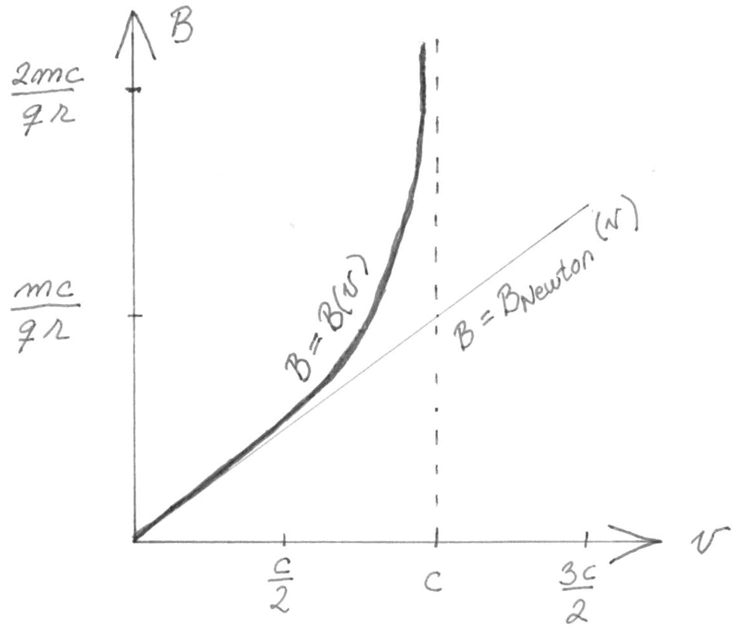
$$m_{\mathrm{rel}}\mathbf{a} = \mathbf{f}.$$

Tämä ei aina päde tässä muodossa, sillä tekijä γ sisältää riippuvuuden nopeudesta, tarkemmin sen neliöstä u^2, ja sen takia sitä ei yleisesti saa viedä ulos aikaderivoinnista. Nyt kumminkin ympyräradalla pätee $u^2 = $ vakio, jolloin tekijä γ on myös vakio ajan suhteen, ja se saadan ulos derivoinnista. Huomattavaa on myös, että nopeus $\mathbf{u}$ ei kumminkaan ole vakio, sillä sen suunta vaihtelee ajassa (nopeuden suuruus $|\mathbf{u}|$ on vakio) ja siksi se pitää derivoida, jolloin saadaan kiihtyvyys $\mathbf{a}$. Keskeiskiihtyvyyden antaa siis Lorentz-voima $f = quB$, eli tasapainossa

$$\frac{m_{\mathrm{rel}}u^2}{r} = quB.$$

Relativistisessä tapauksessa massa on todella kappaleen liikemassa $m_{\mathrm{rel}} = m_{\mathrm{rel}}(u) = \gamma(u)m = m/\sqrt{1 - u^2/c^2}$. Magneettikenttä on helppo ratkaista ylläolevasta lausekkeesta:

$$B(v) = \frac{m_{\mathrm{rel}}(u)u}{qr} = \frac{\gamma(u)mu}{qr} = \underline{\underline{\frac{m}{qr}\frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}}}.$$



Kuva 1: Magneettikentän riippuvuus nopeudesta. Tässä $B = B(u)$ hahmoteltu käsin.

Käyrän $B = B(u)$ voisi helposti piirtää esimerkiksi laskimella, mutta yritetään hahmotella kuvaaja ilman apuvälineitä. Pienillä u neliöjuurilauseke nimittäjässä on noin 1, ja siten $B(u)$ on suora lähellä origoa. Kun v kasvaa, $\sqrt{1 - u^2/c^2}$ pienenee ja $B(u)$ alkaa kasvaa yhä nopeammin. Kun $u \to c$, nimittäjä lähenee nollaa, ja siten $B(u) \to \infty$. Tämä riippuvuussuhde on piirretty kuvaan 1. Jos olisi käytetty Newtonin mekaniikkaa, relativistisen liikemassan m_{rel} olisi korvannut lepomassa m. Siten γ tekijä B:n lausekkeessa olisi yksi:

$$B_{\text{Newton}}(u) = \underline{\underline{\frac{mu}{qr}}}.$$

(b) Protonin kokonaisenergia E on

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \tag{6}$$

Kokonaisenergialla ja kineettisellä energialla ei tässä ole käytännön eroa, koska 7 TeV on paljon enemmän kuin lepoenergia $E_0 = mc^2 = 939$ MeV. Ratkaistaan siis nopeus E:n lausekkeesta $E(u) = \gamma(u)E_0$:

$$E^2 = \frac{E_0^2}{1 - u^2/c^2} \quad \Rightarrow \quad 1 - u^2/c^2 = \frac{E_0^2}{E^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{c} = \sqrt{1 - \frac{E_0^2}{E^2}}.$$

Sijoitetaan $E = 7 \times 10^6$ MeV ja $E_0 = 939$ MeV:

$$\frac{u}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{939}{7 \times 10^6}\right)^2} \approx \underline{\underline{0.999999991.}}$$

Poikkeamaa valon nopeudesta voi myös arvioida käyttämällä Taylorin sarjaa:

$$\frac{u}{c} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{E^2},$$

eli nopeus jää $E_0^2/2E^2 \approx 0.899 \times 10^{-8}$ kertaa c:n verran valon nopeudesta – vain joitain metrejä sekunnissa, siis!

Verrattuna Newtonin teoriaan, tarvitaan $B(u)/B_{\text{Newton}}(u)$ kertaa suurempi B-kenttä:

$$\frac{B(u)}{B_{\text{Newton}}(u)} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(u).$$

Tekijä γ saadaan helposti kaavasta (6):

$$\gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{7 \times 10^6}{939} \approx \underline{\underline{7450.}}$$

Eli kentän tulee olla noin 7450 kertaa voimakkaampi.

5. **Energian ja massan ekvivalenssi** Elektronivoltti jouleina 1 eV $= 1.602 \times 10^{-19}$ J.

(a) Lasketaan massa energian ja massan ekvivalenssista $E = mc^2$. Tässä $E = R_E$, joten

$$m = \frac{R_E}{c^2} = \frac{13.6 \text{ eV}}{c^2} \approx \underline{\underline{2.4 \times 10^{-35} \text{ kg.}}}$$

Vaihtoehtoisesti, voidaan verrata tätä massaa esimerkiksi elektronin lepomassaan, $m_e = 511 \text{ keV}/c^2$:

$$\frac{m}{m_e} = \frac{13.6 \text{ eV}/c^2}{511 \text{ keV}/c^2} \approx 27 \times 10^{-6}.$$

Eli energia on miljoonasosia elektronin lepomassasta. Elektroni jo itsessään on liki häviävän kevyt protonin rinnalla.

(b) kirjoitetaan tapauksia 1 (sidottu tila) ja 2 (ionisoitu tila) vastaavat energiat

$$E_{\text{sid}} = m_p c^2 + m_e c^2 + T_e + U \tag{7}$$
$$E_{\text{ion}} = m_p c^2 + m_e c^2, \tag{8}$$

missä T_e on elektronin kineettinen energia ja U potentiaalienergia. Kun lisäksi tiedetään että $T_e = R_E$ ja $E_{\text{sid}} = E_{\text{ion}} - R_E$, saadaan näistä $U = -2R_E = -27.2$ eV.

(c) Kirjoitetaan $m_e c^2 = m_{e0} c^2 + U_e$, missä m_{e0} on jokin elektronin sisäinen massa ja U_e elektronin sähkökentästä tuleva osuus sen lepoenergiasta. Tekemällä vastaavasti protonille, voidaan äskeiset yhtälöt nyt kirjoittaa

$$E_{\text{sid}} = m_{p0} c^2 + m_{e0} c^2 + T_e + U_{\text{sid}} \tag{9}$$
$$E_{\text{ion}} = m_{p0} c^2 + m_{e0} c^2 + U_p + U_e. \tag{10}$$

Samoin kun edellä voidaan nyt päätellä että

$$U_{\text{sid}} - U_p - U_e = -2R_E = -27.2 \text{ eV}. \tag{11}$$

Tämä tulkitaan niin että kenttään liittynyt massa on sidotussa tapauksessa 1 pienempi kuin ionisoidussa tapauksessa 2 määrällä 27.2 eV$/c^2 = 4.8 \times 10^{-35}$ kg. Kummassakaan tapauksessa kenttään sitoutunut massa ei ole negatiivinen.