

### 1. Koordinaatiston muunnosmatriisi

- a) Osoita että muunnos

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \phi + y \sin \phi \\y' &= -x \sin \phi + y \cos \phi\end{aligned}\tag{1}$$

kuvaa  $x - y$  tason koordinaatiston kiertoa kulmalla  $\phi$ . Kirjoita tätä vastaava  $2 \times 2$  muunnosmatriisi.

- b) Kirjoita  $4 \times 4$ -matriisi neliavaruuden  $(ct, x, y, z)$  koordinaatistomuunnokselle, missä  $x$  ja  $y$  muuttuvat kuten kaavassa (1),  $t' = t$  ja  $z' = z$ .
- c) Kirjoita  $4 \times 4$ -muunnosmatriisi Lorentz-muunnokselle koordinaatistosta  $K$  koordinaatistoon  $L'$ , joka liikkuu  $y$ -akselin suuntaan. Muuten tee samat oletukset kuin tavallisesti, eli akselit  $x$  ja  $x'$  ovat samaan suuntaan, vastaavasti  $y$  ja  $y'$  sekä  $z$  ja  $z'$ , origot yhtyvät kun  $t = t' = 0$  ja  $L'$  liikkuu  $K$ :n suhteen nopeudella  $v$ . (Vihje: sen sijaan että johtaisit Lorentz-muunnoksen uudestaan, tee hyvä arvaus.)

### 2. $\Delta s^2$ tulkinta

- a) Oletetaan, että kahden tapahtuman  $(ct_1, x_1)$  ja  $(ct_2, x_2)$  etäisyyden neliö  $\Delta s^2 > 0$ . Tee Lorentz-muunnos koordinaatistoon  $K'$ , jossa tapahtumien paikat ovat samat. Mikä on tämän koordinaatiston nopeus? Osoita että  $\Delta s^2 = c^2 \Delta \tau^2$ , missä  $\Delta \tau$  on tapahtumien aikaero koordinaatistossa  $K'$ .
- b) Edellä  $\Delta s^2 > 0$  tulkittiin aikaeroksi tietyssä koordinaatistossa. Millaisen vastaavan tulkinnan saat tapaukselle  $\Delta s^2 < 0$ ?

### 3. Kaksosparadoksi karusellissa

Ystäväsi menee Linnanmäellä karuselliin, jonka säde on 10 m, ja joka pyörähtää ympäri 5 sekunnissa. Itse odotat karusellin vieressä.

- a) Millainen on ystäväsi *maailmanviiva* karusellin yhden kierroksen aikana sinun lepokoordinaatistossasi. Piirrä kuva käyttäen koordinaattiakseleina  $x$  ja  $y$  (maan tason koordinaatit) ja  $ct$ .
- b) Kuinka paljon lyhyempi aika ystävälläsi kuluu kierrokseen kuin sinulla? Vihje: laske kummankin itseisaika yhden kierroksen kuluessa luennolla johdetusta kaavasta

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dt.\tag{2}$$

- c) Miksi ominaisajat eroavat, eli miksi tilanne ei ole symmetrinen sinun ja ystäväsi suhteen?

#### 4. Ominaisaika kiihtyvässä liikkeessä

Palataan vielä avaruusmatkaan Alpha Centauriin, mikä on etäisyyden  $R = 4$  valovuotta  $= 4 \text{ ca}$  ( $\text{a} = \text{vuosi}$ ) päässä. Tällä kertaa matka tapahtuu niin että etäisyys Maasta on ajan funktiona

$$r(t) = \frac{R}{2} \left( 1 - \cos \frac{2ct}{R} \right).$$

a) Piirrä tästä kuva. b) Mikä on edestakaiseen matkaan käytetty aika  $\Delta t$  Maan koordinaatistossa? c) Mikä on nopeus ajan funktiona, ja mikä on maksiminopeus?

d) Laske matkaan kuluva aika  $\Delta \tau$  avaruusmatkaaajan kellon mukaan käyttäen ominaisajan lauseketta

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dt. \quad (3)$$

e) Vertaa tulosta siihen, jos matka tapahtuisi samassa ajassa Maan koordinaatistossa vakionopeudella (mikä laskettiin 1-kurssin harjoituksessa 4.3).

Vastauksia: b)  $\Delta t = 4\pi \text{ a}$ , d)  $\Delta \tau = 8 \text{ a}$ .

### 1. Nelinopeus ympyräliikkeessä

Ympyräliikettä kuvaa neliavaruuden vektori

$$x^\mu = (ct, r \cos(\omega t), r \sin(\omega t), 0), \quad (4)$$

missä  $r$  ja  $\omega$  ovat vakioita. Laske nelinopeus, nelikiihtyvyys ja nelikiihtyvyyden pituus. Osoita että nelinopeus ja nelikiihtyvyys ovat nelivektorimielessä kohtisuorassa. Miten neliliikemäärä ja nelivoima eroavat edellä lasketuista suureista?

### 2. Neliavaruuden skalaaritulo

- Laske neliavaruuden skalaaritulo vektoreille  $a^\mu = (a \sin \alpha, a \cos \alpha, 0, 0)$  ja  $b^\mu = (b \sin \beta, b \cos \beta, 0, 0)$ . Miten tulokset normaalin euklidisen geometrian avulla ehdon että nelivektorit ovat kohtisuorassa,  $\eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = 0$ . Piirrä tästä Minkowskin diagrammi (missä koordinaattiakseli 0 pystyssä ja 1 vaakasuorassa).
- Piirrä Minkowskin diagrammi nopeusavaruudessa  $(u^0, u^1, 0, 0)$ . Mitä tarkoittaa geometrisesti että nelinopeusvektorin pituus on vakio? Mitä vastaavaa voit sanoa neliliikemäärästä  $p^\mu = m u^\mu$ ?
- Nelikiihtyvyys  $a^\mu$  sekä nelivoima  $f^\mu = m a^\mu$  ovat määritelmän mukaan  $du^\mu$ :n suuntaisia vektoreita. Piirrä Minkowskin diagrammi missä esiintyy  $u^\mu$ ,  $a^\mu$ :n suunta ja tulkitse geometrisesti ehto että ne ovat nelivektorimielessä kohtisuorassa.

### 3. Energia, liikemäärä ja nopeus

- Johda luennoilla esitetty kaava

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{u}. \quad (5)$$

- Luennolla johdettiin kappaleen energialle  $E$  kaava

$$E = c \sqrt{m^2 c^2 + p^2}. \quad (6)$$

Oleta että  $p \ll mc$ . Laske kaksi ensimmäistä nolasta poikkeavaa termiä  $E$ :n potenssisarjassa  $p$ :n suhteen. Tulkitse nämä termit.

### 4. CERNin protonit

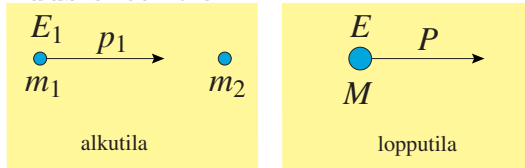
CERNin LHC-kiihdytin kiihdyttää (kunhan saavuttaa suunnitellun suorituskykynsä) protonit 7 TeV:n energiaan. Yhtä aikaa kiihdytintä kiertää n.  $3 \times 10^{14}$  protonia.

- Mikä on koko protonisuihkun kineettinen energia SI-yksiköissä? Mikä olisi 1000 kg:n massaisen auton nopeus oltava jotta sillä olisi sama kineettinen energia?

b) Mikä on suihkun liikemäärä? Jälleen, mikä olisi 1000 kg:n massaisen auton nopeus jotta sillä olisi sama liikemäärä?

Vastaukset: a) 820 m/s, b) 1.1 mm/s.

## 1. Fuusioreaktio



Luennolla tarkasteltiin tapausta missä energian  $E_1$  hiukkanen (massa  $m_1$ ) törmää levossa olevaan hiukkaseen (massa  $m_2$ ), ja ne muodostavat yhden hiukkasen, jonka massa on  $M$  ja energia  $E$ . Säilymislaeista johdettiin yhtälöt

$$\begin{aligned}
 E_1 + c^2 m_2 &= E \\
 \mathbf{p}_1 &= \mathbf{P} \\
 \frac{E_1^2}{c^2} &= c^2 m_1^2 + p_1^2 \\
 \frac{E^2}{c^2} &= c^2 M^2 + P^2.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Ratkaise näistä lopputilan suuret  $E$ ,  $P$ ,  $M$  ja nopeus  $u$ , ilmaisten ne käyttäen alkutilan parametreja  $m_1$ ,  $m_2$  ja  $E_1$ .

## 2. Fotonipari

Olkoon  $x$ -akselin suuntaan liikkuvan fotonin energia 100 MeV ja toisen,  $y$ -akselin suuntaan liikkuvan fotonin energia 200 MeV. Mikä on systeemin kokonaisenergia ja kokonaisliikemäärä, eli kokonaisneliliikemäärä? Jos yhdellä hiukkasella olisi sama kokonaisneliliikemäärä, mikä olisi sen massa? Entä sen nopeus, ja mihin suuntaan se liikkuisi?

## 3. Säteilypaine

Auringon säteilyteho pinta-alaa kohti Maapallon etäisyydellä on noin  $1.3 \text{ kW/m}^2$ . Oletetaan 100% heijastava  $1 \text{ m}^2$ :n peili kohtisuorassa valon tulosuuntaan nähden. Kuinka suuren voiman säteilypaine aiheuttaa peiliin?

## 4. Dopplerin ilmiö

- Ääniaaltojen tapauksessa Dopplerin ilmiö riippuu sekä lähteen että havaitsijan liikkeestä väliaineen suhteen. Miksi valon tapauksessa Dopplerin ilmiö riippuu ainoastaan lähteen ja havaitsijan suhteellisesta nopeudesta?
- Millä nopeudella auto lähestyy liikennevaloja jos alun perin punainen valo ( $\lambda = 630 \text{ nm}$ ) näyttää vihreältä ( $\lambda = 540 \text{ nm}$ )?

## 5. Valopulssit

Paloauton vilkkuvalo välähtää ajan  $\tau'$  välein, eli hetkillä  $t'_n = n\tau'$  (missä  $n$  on kokonaisluku) ja  $x'_n = 0$  paloauton omassa lepokoordinaatistossa  $K'$ . Se lähestyy nopeudella  $v$  tien vierellä seisovaa koordinaatiston  $K$  havaitsijaa paikassa  $x = L$ .

- a) Piirrä Minkowskin diagrammi (valiten K:n akselit kohtisuoriksi), missä on paloauton maailmanviiva ja välähdykset.
- b) Tarkastellaan välähdyksiä jota tapatuvat ennen kuin paloauto saapuu havaitsijan luo. Laske ajanhetket joilla valopulssit saapuvat havaitsijalle. Mikä on näiden aikaväli  $\tau$ ? (Huom: ei riitä että laskee välähdysten lähtöajat K:n koordinaatistossa, vaan myös valon lähtöpaikat vaikuttavat! Lisää valon viivat edelliseen diagrammiin.)
- c) Mikä on välähdysten havaintojen aikaväli havaitsijan mielestä kun paloauto on ohittanut hänet?
- d) Osoita että identifioimalla välähdysten välien käänteisluvut taajuuksiksi,  $\nu = 1/\tau$ ,  $\nu' = 1/\tau'$ , saamasi tulokset yhtyvät luennoilla johdettuun Doppler-siirtymän kaavaan.

**Vastauksia**

3)  $8.7 \times 10^{-6}$  N, 4b)  $0.15c$ .

### 1. Rekyyli

Tarkastellaan levossa olevaa kappaletta, joka kokee rekyylin, kun se emittoi fotonin (tai useita samansuuntaisia fotoneja). Kappaleen lepomassa ennen emissiota on  $M$  ja sen jälkeen  $m_1$ , jolloin reaktiossa vapautunut energia  $Q = (M - m_1)c^2$ .

- a) Osoita kappaleen rekyylinopeudelle lauseke

$$u = c \frac{M^2 - m_1^2}{M^2 + m_1^2}. \quad (8)$$

Vihje: käytä hyväksesi monisteessa johdettuja kaavoja.

- b) Osoita että kun  $Q \ll Mc^2$ , voidaan kaavaa (8) approksimoida

$$u \approx \frac{Q}{cM}. \quad (9)$$

Osoita että tämän tuloksen voi suoremmin johtaa kirjoittamalla energian ja liikemäärän säilymislaite ja tekemällä seuraavat oletukset: energian säilymislaissa rekyylienergia jätetään pois ja kappaleen liikemäärälle käytetään Newtonin teorian kaavaa  $p_1 = m_1 u \approx Mu$ .

- c) Pieni AA-paristolla varustettu taskulamppu (massa 25 g) kelluu avaruudessa. Pariston kapasiteetti on 3000 mAh ja jännite 1.5 V. Kuinka suureen nopeuteen lamppu kiihtyy virran kytkemisen jälkeen, jos oletetaan että 100% energiasta muuntuu sähkömagneettiseksi säteilyksi (valo/lämpö), joka etenee suoraan lampun pituusakselin suuntaisesti? Vihje: kaavan (9) antama tarkkuus on täysin riittävä.

### 2. Rekyylin kompensointi

Fotonin emissiossa fotoni ei saa koko vapautuvaa energiaa  $Q$  koska osa energiasta menee lähettävän kappaleen (massa  $M$ ) rekyyliksi. Oletetaan että  $Q \ll Mc^2$ .

- a) Osoita että rekyylistä johtuva fotonin energian pienennys voidaan korvata sillä että lähettävä kappale alun perin liikkuu nopeudella

$$v \approx \frac{Q}{2cM} \quad (10)$$

samaan suuntaan kuin fotoni emittoituu.

- b) Laske  $v$  natriumatomille (atomimassa 23.0 u), kun vapautuva energia vastaa fotonia aallonpituudella 589.5 nm. (Tämä on keltaisen valon aallonpituudella oleva natriumin D-viiva). Vertaa tulosta huoneen lämpötilassa olevassa kaasussa olevien atomien keskimääräiseen nopeuteen  $v_{\text{terminen}} = \sqrt{3k_B T/m} = 560$  m/s, missä  $m$  on atomin massa,  $k_B$  on Boltzmannin vakio ja  $T$  absoluuttinen lämpötila. (Tämä kaava perustellaan myöhemmin termofysiikan kurssissa.)

- c) Laske  $v$  rauta-atomille  $^{57}\text{Fe}$ , kun sen ydin lähettää gammasäteen energialla 14.4 keV. Vertaa tulosta Mössbauer-spektroskopiassa käytettäviin nopeuksiin  $\sim 10$  mm/s.

### 3. Fotoniraketti

Fotoniraketin käyttövoimana on taakse suunnattu fotonisäteily. Mikä murtoosa raketin alkuperäisestä massasta on jäljellä, kun raketti on levosta lähtien saavuttanut nopeuden  $v$ ? Laske numeroarvo kun  $v = 0.9c$ .

### 4. Kielletyt prosessit

Osoita käyttämällä kokonaisneliliikemäärän säilymistä että seuraavat prosessit ovat mahdottomia:

- a) Elektroni ja sen antihioukkanen positroni annihiloituvat yhdeksi fotoniksi:  
$$e^- + e^+ \longrightarrow \gamma, \quad m_{e^+} = m_{e^-}.$$
- b) Elektroni absorboi fotonin:  
$$e + \gamma \longrightarrow e.$$

Vihje: käytä hyväksesi että voit valita sopivan koordinaatiston.

### 5. Sirontakulma

Kaksi identtistä hiukkasta liikkuvat massakeskuskoordinaatistossa  $x^*$ -akselia pitkin vastakkaisiin suuntiin nopeudella  $u^*$ . Ne törmäävät elastisesti ja siroavat  $90^\circ$  kulmaan, siis jatkavat liikettä  $y^*$ -akselin suuntaisesti. Mikä on sirontakulma laboratoriokoordinaatistossa, jossa toinen alkuperäisistä hiukkasista on paikallaan? Vihje: huomaa että hiukkasen nopeus massakeskuskoordinaatistossa  $u^*$  on sama kuin massakeskuskoordinaatiston nopeus  $v$  laboratoriokoordinaatiston suhteen.

### Vastaukset

1c) 2.2 mm/s, 2b) 15 mm/s, 2c) 41 m/s, 3) 23%, 5)  $\tan \theta = \sqrt{1 - u^{*2}/c^2}$ .