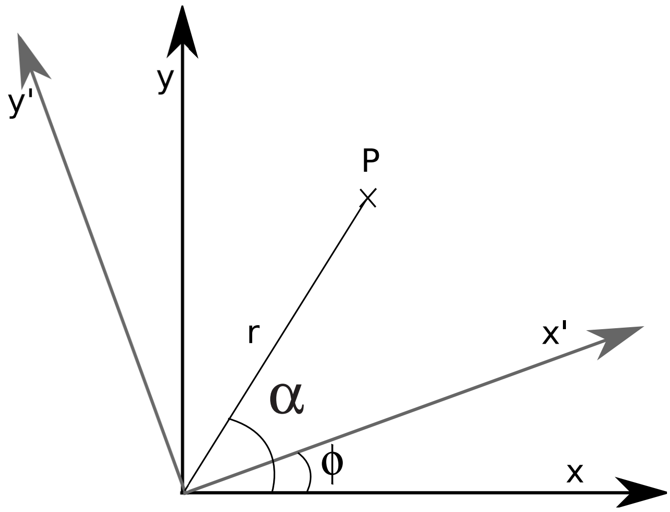
1. **Koordinaatiston muunnosmatriisi**

(a)



Tarkastellaan, mitä annettu muunnos

$$x' = x\cos\phi + y\sin\phi, \tag{1a}$$
$$y' = -x\sin\phi + y\cos\phi, \tag{1b}$$

tekee mielivaltaiselle pisteelle $P = (x, y)$. Esitetään tämä kulman α ja etäisyyden origosta r avulla,

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha.$$

Muunnos antaa x'-koordinaatille

$$\begin{aligned} x' &= r\cos\alpha\cos\phi + r\sin\alpha\sin\phi = r\left(\cos\alpha\cos\phi + \sin\alpha\sin\phi\right) \\ &= r\cos(\alpha - \phi), \end{aligned}$$

ja y-koordinaatille

$$\begin{aligned} y' &= -r\cos\alpha\sin\phi + r\sin\alpha\cos\phi = r\left(-\cos\alpha\sin\phi + \sin\alpha\cos\phi\right) \\ &= r\sin(\alpha - \phi). \end{aligned}$$

Eli uudessa koordinaatistossa piste $P' = (x', y')$ on yhä r:n päässä origosta, mutta kulma x'-akselista on nyt $\alpha - \phi$. Uusi koordinaatisto on siten saatu kiertämällä vanhaa ϕ:n verran vastapäivään.

Muunnosmatriisi on siis se matriisi, jolla kertomalla saadaan (x, y):stä (x', y'). Matriisi löytyy kaavasta (1), kun matriisin (vaaka)riveille poimitaan x:n ja y:n kertoimet:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{2}$$

eli muunnosmatriisi $R(\phi)$ on

$$\underline{\underline{R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}}}. \tag{3}$$

Muunnosmatriisi todellakin kuvaa rotaatiota, sillä $\mathrm{Det}[R(\phi)] = 1$.

(b) Kirjoitetaan yhtälö matriisimuotoon ihan samoin kuin edellä, paitsi että kullekin matriisin riville haetaan ct, x, y, ja z:n kertoimet, ja muistetaan yhtälöt ct:lle ja z:lle. Kaikki yhdessä:

$$\begin{aligned} ct' &= ct, \\ x' &= x\cos\phi + y\sin\phi, \\ y' &= -x\sin\phi + y\cos\phi, \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Selvyyden vuoksi täytetään puuttuvat kertoimet:

$$\begin{aligned} ct' &= 1\cdot ct + 0\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z, \\ x' &= 0\cdot ct + \cos\phi\cdot x + \sin\phi\cdot y + 0\cdot z, \\ y' &= 0\cdot ct - \sin\phi\cdot x + \cos\phi\cdot y + 0\cdot y, \\ z' &= 0\cdot ct + 0\cdot x + 0\cdot y + 1\cdot z. \end{aligned}$$

Poimitaan nyt kerroinmatriisi ylläolevista yhtälöistä:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(c) Lorentz-muunnoksen muoto y-suuntaisen liikkeen tapauksessa on melko helppo arvata, kun muistaa muunnoksen x-suuntaiselle liikkeelle: koordinaatit x ja y vain vaihtavat rooleja. Eli, Lorentz muunnos on nyt

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= \gamma(y - vt), \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma(t - vy/c^2), \end{aligned}$$

missä $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Jälleen, lisätään tässä puuttuvat kertoimet, jotta varmasti tulee selväksi miten muunnosmatriisi muodostetaan. Lisäksi kirjoitetaan yhtälöt ct:lle t:n sijaan:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma\cdot ct + 0\cdot x - \gamma v/c\cdot y + 0\cdot z, \\ x' &= 0\cdot ct + 1\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z, \\ y' &= -\gamma v/c\cdot ct + 0\cdot x + \gamma\cdot y + 0\cdot z, \\ z' &= 0\cdot ct + 0\cdot x + 0\cdot y + 1\cdot z. \end{aligned}$$

Eli matriisimuodossa:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma v/c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Nelivektorimuodossa tämä voidaan ilmaista seuraavasti

$$(x')^\nu = \Lambda^\nu_\mu x^\mu,$$

missä Λ^ν_μ on Lorentz-muunnosta vastaava tensori (esimerkiksi yllä määritetty matriisi).

2. Δs^2 **tulkinta**

(a) Oletetaan siis, että $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 > 0$ koorinaatistossa K. Siirrytään koordinaatistoon K', jossa oletetaan olevan voimassa $\Delta x' = 0$. Nyt Lorentz-muunnoksen nojalla pätee

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Tällöin saadaan koordinaastistojen väliseksi suhteelliseksi nopeudeksi, että $\Delta x - v\Delta t = 0$ eli $v = \Delta x/\Delta t$. Vielä täytyy tarkistaa, että

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} < c,$$

mutta tämä seuraa ehdosta $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 > 0$, josta saadaan arvio $|\Delta x| < c|\Delta t|$. Tapahtumien aikaeroksi voidaan laskea $\delta\tau = \Delta t$ Lorentz-muunoksesta tai käyttämällä suureen Δs^2 invarianttisuutta ja laskemalla koordinaatistossa K'

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = c^2\Delta t'^2 = c^2\Delta\tau^2.$$

(b) Nyt $\Delta s^2 < 0$. Etenemällä samaan tapaan kuin edellä eli valitaan koordinaatistoksi K' siten, että $\Delta t' = 0$. Lorenz-muunoksen

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - (v/c^2)\Delta x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

jolloin saadaan koordinaatistojen väliseksi suhteelliseksi nopeudeksi

$$v = \frac{\Delta t}{\Delta x}c^2.$$

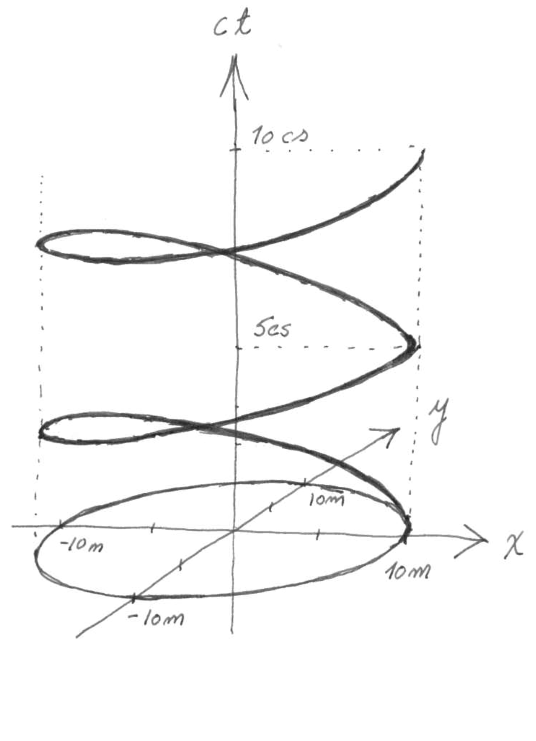
Vaatimus $\Delta s^2 < 0$ antaa, että $|\Delta x| > c|\Delta t|$. Näin ollen $|v| < c$. Toisin sanoen, kun $\Delta s^2 < 0$, on olemassa koordinaatisto, jossa tapahtumat ovat samanaikaisia. Lisäksi

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = \Delta x'^2$$

eli $\sqrt{-\Delta s^2}$ voidaan tulkita tapahtumien paikkoeroksi edellä valitussa koordinaatistossa K'.

3. **Kaksosparadoksi karusellissa**

(a) Karusellissa matkustavan maailmanviiva on spiraali. Ajan edetessä karuselli kiertää 10 m säteistä kehää.



(b) Olkoon $T = 5$ s aika, jossa karuselli tekee yhden kierroksen. Karusellin vieressä (nopeus $u = 0$) kulunut itseisaika on tietenkin

$$\Delta\tau = \int_0^T \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\, \mathrm{d}t = \int_0^T \sqrt{1 - 0}\, \mathrm{d}t = T.$$

Karusellissa, $u = 2\pi \cdot 10$ m/5 s ≈ 12.6 m/s,

$$\Delta\tau' = \int_0^T \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\, \mathrm{d}t = T\sqrt{1 - u^2/c^2}.$$

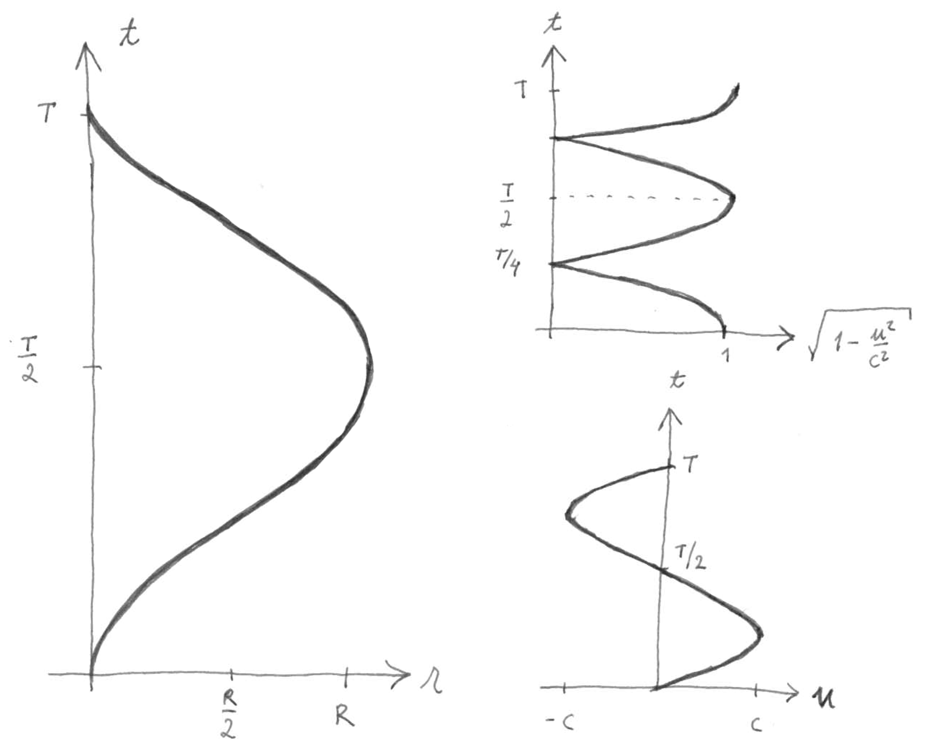
Näiden ero on siten

$$\begin{aligned}\Delta\tau - \Delta\tau' &= (1 - \sqrt{1 - u^2/c^2})T \\ &\approx \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}\right)\right] T = \frac{u^2}{2c^2}T \\ &\approx \underline{\underline{4.39 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{s.}}}\end{aligned}$$

Neliöjuurilauseke todella lähellä ykköstä. Arvioidaan sitä Taylorin sarjan ensimmäisillä termeillä.

(c) Karusellin kyydissä olevan mielestä vieressä seisovan aika vaikuttaa kuluvan hitaammin, joten voisi ajatella, että ominaisajat ovat yhtä suuret. Karusellissa liike on kuitenkin kiihtyvää, minkä vuoksi tilanne ei ole symmetrinen.

4. **Ominaisaika kiihtyvässä liikkeessä** Kuvaan on piirretty $r(t)$, sekä siitä saatu nopeus u, ja ominaisajan laskemisessa tarvittava $\sqrt{1 - u^2/c^2}$.



Olkoon T matkaan käytetty aika. Hetkellä $t = T$ on matkaaja takaisin kotona, eli $r(T) = r(0) = 0$.

$$r(T) = \frac{R}{2}\left(1 - \cos\frac{2cT}{R}\right) = 0,$$

eli $\cos 2cT/R = 1$, mikä toteutuu toisen kerran, kun $2cT/R = 2\pi$. Matka-ajaksi saadaan siis

$$\underline{\underline{\Delta t = T = \frac{\pi R}{c}.}}$$

Nopeus saadaan derivoimalla t:n suhteen,

$$u(t) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{R}{2}(-1)\frac{2c}{R}\sin\frac{2ct}{R} = \underline{\underline{c\sin\frac{2ct}{R}}}\,.$$

Koska sinin maksimi on 1, on maksiminopeus $\underline{\underline{c}}$.

Ominaisaika on nyt

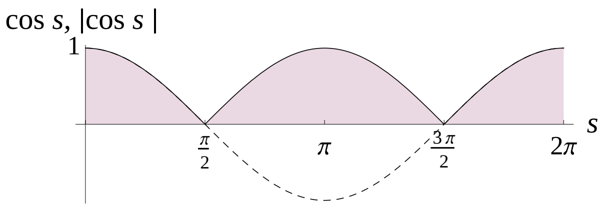
$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^T \underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}c^2\sin^2\frac{2ct}{R}}}_{\substack{=\sqrt{\cos^2 2ct/R} \\ =|\cos 2ct/R|}}\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T \left|\cos\frac{2ct}{R}\right|\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{R}{2c}\int_0^{2\pi} |\cos s|\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{2R}{c}\int_0^{\pi/2} |\cos s|\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{2R}{c}\int_0^{\pi/2} \cos s\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{2R}{c}\ \Big/_{0}^{\pi/2}\sin s \\
&= \underline{\underline{\frac{2R}{c}}}.
\end{aligned}$$

On helpompi hahmottaa intergraali kun vaihdetaan integrointimuuttujaksi $s = 2ct/R$. Ylemmäksi intergorintirajaksi tulee $2cT/R = 2\pi$.

Alla olevasta kuvasta selviää, että integraali on sama kuin 4 kertaa integraali nollasta $\pi/2$:teen.

Itseisarvomerkit voidaan poistaa koska integrointivälillä $\cos s \geq 0$.



Siis tuloksena saadaan, että matkaajalle $\Delta\tau = 8$ a ja Maassa $\Delta t = 4\pi$ a. Suhteellisuusteorian 1 laskareiden tehtävän vakionopeudella $v = (3/4)c$ vastaavat arvot olivat matkaajalle $\Delta\tau = 6$ a ja Maassa $\Delta t = 10$ a. Siis matkaaja vanhenee hitaamin.