1. **Nelinopeus ympyräliikkeessä** On siis annettu kappaleen paikkaa kuvaava nelivektori $\mathrm{X} = x^\mu$:

$$x^\mu = (ct, r\cos\omega t, r\sin\omega t, 0) = (ct, \boldsymbol{x}(t)).$$

Nelinopeus $\mathrm{U} = u^\mu$ on määritelty kaavalla

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau},$$

missä τ on x:n mukana liikkuvan koordinaatiston ominaisaika. Koska $\mathrm{d}\tau = \sqrt{1-u^2/c^2}\mathrm{d}t$, on

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}.$$

Tässä u ympyrärataa kulkevan kappaleen nopeus, eli $u = r\omega$. Varmemmaksi vakuudeksi lasketaan tämä myös kappaleen paikan X avaruusosasta $\boldsymbol{x}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\cos\omega t, r\sin\omega t, 0) = (-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t, 0) \\ \Rightarrow\quad u &= |u| = \sqrt{r^2\omega^2\sin^2\omega t + r^2\omega^2\cos^2\omega t} = r\omega. \end{aligned}$$

Nelinopeus on siis

$$\begin{aligned} u^\mu &= \frac{1}{\sqrt{1-r^2\omega^2/c^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ct, \boldsymbol{x}) \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1-r^2\omega^2/c^2}}(c, -r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t, 0).}} \end{aligned}$$

Nelikiihtyvyys $\mathrm{A} = a^\mu$ saadaan vastaavasti nelinopeuden ominaisaika derivaattana:

$$\begin{aligned} a^\mu &= \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}(c, -r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t, 0)\right] \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{1-r^2\omega^2/c^2}(0, -r\omega^2\cos\omega t, -r\omega^2\sin\omega t, 0).}} \end{aligned}$$

Huomaa, että yleisesti nopeus u on ajasta riippuva, ja siten ylläolevassa laskussa tulisi myös derivoida tekijä $\gamma(u) = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$. Tässä $u = r\omega$ on kuitenkin vakio.

Nelikiihtyvyyden pituuden neliö on

$$\begin{aligned} \mathrm{A}\cdot\mathrm{A} &= \eta_{\mu\nu}a^\mu a^\nu = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2 \\ &= \frac{1}{(1-r^2\omega^2/c^2)^2}(0^2 - (-1)^2 r^2\omega^4\cos^2\omega t - (-1)^2 r^2\omega^4\sin^2\omega t - 0^2) \\ &= \underline{\underline{-\frac{r^2\omega^4}{(1-r^2\omega^2/c^2)^2}.}} \end{aligned}$$

Nelinopeuden ja nelikiihtyvyyden kohtisuuruus tarkoittaa, että $\mathrm{U}\cdot\mathrm{A} = 0$. Osoitetaan suoralla laskulla, että näin on:

$$\begin{aligned} \mathrm{U}\cdot\mathrm{A} &= \eta_{\mu\nu}u^\mu a^\nu = u^0a^0 - u^1a^1 - u^2a^2 - u^3a^3 \\ &= \frac{-r\omega^2}{(1-r^2\omega^2/c^2)^{3/2}}(c\cdot 0 - (-1)r\omega\sin\omega t\cos\omega t - r\omega\cos\omega t\sin\omega t - 0\cdot 0) \\ &= \underline{\underline{0.}} \end{aligned}$$

Neliliikemäärä $p^\mu = mu^\mu$ on siis vain nelinopeus kerrottuna lepomassalla. Vastaavasti nelivoima f^μ,

$$f^\mu = \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = m\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = ma^\mu,$$

on nelikiihtyvyys kerrottuna lepomassalla.

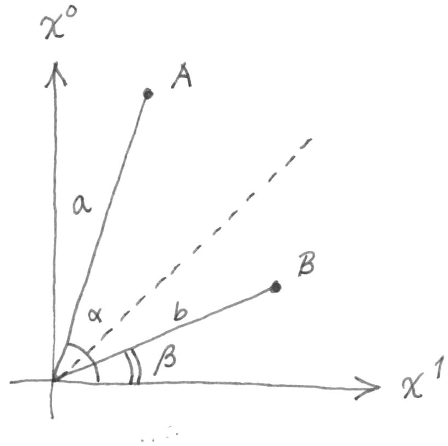
2. **Neliavaruuden skalaaritulo**

(a) Kysymys siis on: Miltä kohtisuorassa olevat vektorit näyttävät Minkowskin diagrammissa, eli koordinaatistossa, jossa pystyakseli on ajanlaatuinen x^0 ja vaaka-akseli paikanlaatuinen x^1?

On annettu kaksi neliavaruuden vektoria A ja B,

$$a^\mu = (a \sin\alpha, a\cos\alpha, 0, 0),$$
$$b^\mu = (b \sin\beta, b\cos\beta, 0, 0).$$

Tässä a ja b mittaavat (Euklidista) etäisyyttä origosta, ja kulmat α ja β kertovat kulman x^1 akselista vastapäivään:



Lasketaan skalaaritulo A · B:

$$\begin{aligned}\eta_{\nu\mu} a^\nu b^\mu &= a\sin\alpha \cdot b\sin\beta - a\cos\alpha \cdot b\cos\beta \\ &= -ab\cos(\alpha+\beta).\end{aligned}$$

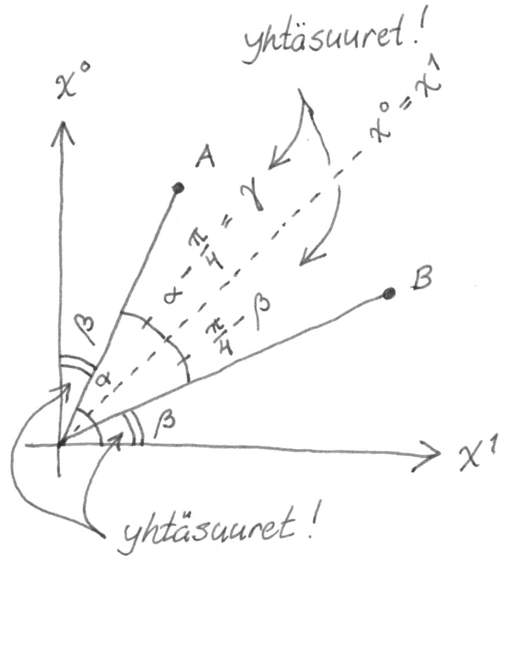
Jotta tämä olisi nolla, on oltava

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

missä n on kokonaisluku. Valitaan selvyyden vuoksi $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi/2$, jolloin n:n täytyy olla nolla. Kohtisuoruusehdosta $\alpha + \beta = \pi/2$ saadaan tällöin

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

Toisin sanoen, A muodostaa kulman β koordinaattiakseliin 0 nähden:



Kohtisuoruusehto voidaan vaihtoehtoisesti kirjoittaa muotoon

$$\alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \beta.$$

Yhtälön vasen puoli on kulma A:n ja suoran $x^0 = x^1$ välillä, ja oikea puoli sama B:lle. Tästä saadaan kohtisuoruuden ehkä selkein tulkinta:

$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = 0 \quad \Longleftrightarrow$ Vektoreiden A ja B suunnat diagrammissa ovat symmetriset viivan $x^0 = x^1$ suhteen.

(b) Euklidisessä geometriassa vektorit $\boldsymbol{x}$, joille $|\boldsymbol{x}|^2 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} =$ vakio, muodostavat ympyrän (pallon kolmessa ulottuvuudessa). Millaisen käyrän kiinnitetyn mittaiset nelivektorit muodostavat Minkowskin diagrammissa?

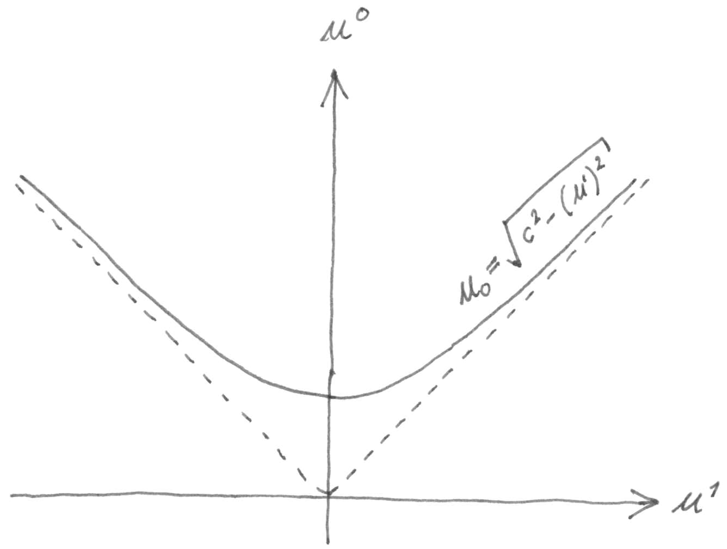
Nelinopeuden $\mathrm{U} = u^\mu = (u^0, u^1, 0, 0)$ pituus on aina c, joten sille

$$\mathrm{U} \cdot \mathrm{U} = (u^0)^2 - (u^1)^2 = c^2.$$

Koska diagrammimme akselit ovat tässä u^0 ja u^1, ratkaistaan yllä olevasta yhtälöstä u^0 koordinaatin u^1 avulla. Sen jälkeen voimme yksinkertaisesti piirtää kuvaajan $u^0 = u^0(u^1)$.

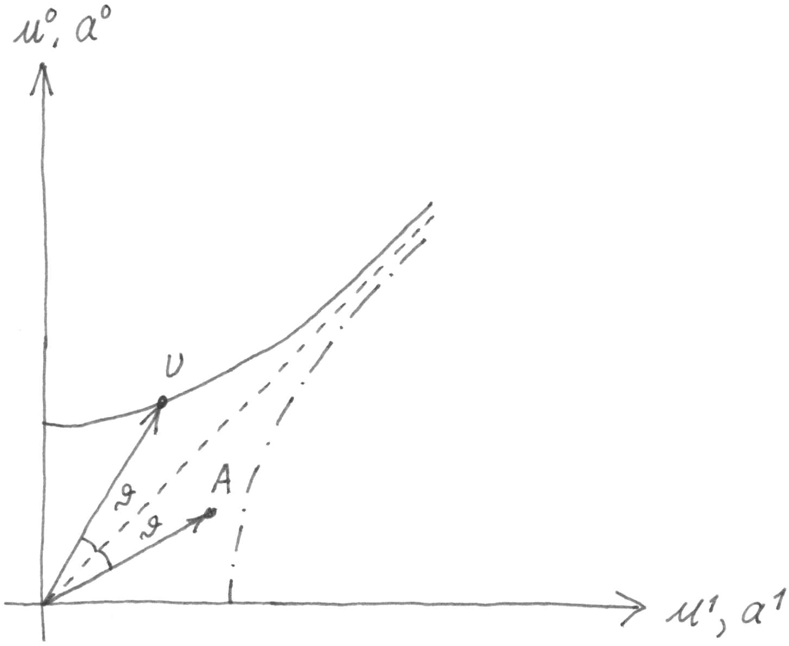
$$u^0 = \pm\sqrt{c^2 + (u^1)^2}.$$

Nyt voidaan hahmotella u^0:n kuvaaja:



Koska $p^\mu = mu^\mu$ ja m on vakio, neliliikemäärät ovat myös aina saman muotoisella kuvaajalla Minkowskin diagrammissa.

(c) Yhdistetään edellisten kohtien tulokset. Valitaan ensin jokin $\mathrm{U} = u^\mu$ edellä piirretyltä kuvaajalta. Seuraavaksi katsotaan se kulma, jonka jää U:n ja suoran $u^0 = u^1$ väliin. Kutsutaan sitä vaikka θ:ksi. Sitten, piirretään vektori $\mathrm{A} = a^\mu$ samaan kulmaan $u^0 = u^1$:stä ($a^0 = a^1$:stä), mutta toiselle puolelle. A:n pituus voi olla mitä vain. Ja siinä kaikki! Kuitenkin, jos A:n piirtää U:n kärkeen, niin A on käyrän tangentin suuntainen siinä pisteessä.



3. **Energia, liikemäärä ja nopeus**

(a) Koska

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad \boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

saadaan liikemäärälle

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{u} \cdot c^2}{c^2 \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \cdot \frac{\boldsymbol{u}}{c^2} = \frac{E}{c^2}\boldsymbol{u}.$$

(b) Energia lausuttuna liikemäärän avulla on siis

$$E = c\sqrt{m^2c^2 + p^2} = mc^2\sqrt{1 + p^2/m^2c^2}.$$

Kun $p \ll mc$, eli kun $p^2/m^2c^2 \ll 1$, saadaan käyttämällä Taylorin sarjaa $\sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \varepsilon/2 + \cdots$

$$E \approx mc^2 \left[1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m^2c^2}\right] = mc^2 + \frac{p^2}{2m}.$$

Ensimmäinen termi on tietenkin lepoenergia, ja jälkimmäinen klassinen kineettinen energia, $p^2/2m = m^2v^2/2m = mv^2/2$.

4. **CERNin protonit** SI-yksiköissä yksi elektronivoltti on $\mathrm{eV} = 1.602 \times 10^{-19}$ J.

(a) Koska protonin lepoenergia on yhden GeV:n luokkaa, on $E_p = 7$ TeV:n protonin kokonaisenergia käytännössä pelkästään kineettistä energiaa. Kun suihkussa on $N = 3 \times 10^{14}$ protonia, on sen kineettinen energia

$$\begin{aligned} E_{\text{suihku}} &= NE_p = 3 \times 10^{14} \times 7 \times 10^{12} \text{ eV} \\ &= 21 \times 10^{26} \times 1.602 \times 10^{-19} \text{ J} \approx 33.6 \times 10^7 \text{ J} \\ &= \underline{\underline{336 \text{ MJ.}}} \end{aligned}$$

Yritetään laskea auton nopeus epärelativistisella kaavalla. Jos tulos on liian suuri, yli $c/10$:n luokkaa, tulee käyttää relativististä liike-energiaa.

$$\frac{1}{2}m_{\text{auto}}u^2 = E_{\text{suihku}} \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{2E_{\text{suihku}}/m_{\text{auto}}}.$$

Sijoitataan lukuarvot:

$$u \approx \underline{\underline{820\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}.$$

Eli lujaa menee, mutta ei relativistisen lujaa.

(b) Liikemäärä voidaan laskea kaavasta $E = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$. Jälleen, koska lepoenergia on pieni verrattuna kineettiseen energiaan, voidaan arvioida $E \approx c\sqrt{p^2} = cp$. Siten

$$p_{\text{suihku}} = \frac{E_{\text{suihku}}}{c} \approx \underline{\underline{1.1\ \frac{\text{kgm}}{\text{s}}}}.$$

Autolle riittää epäilemättä käyttää epärelativistista kaavaa:

$$m_{\text{auto}}u = p_{\text{suihku}} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{p_{\text{suihku}}}{m_{\text{auto}}} = \underline{\underline{0.0011\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}.$$