1. **Fuusioreaktio.** Lähdetään suoraan annetuista yhtälöistä

$$E_1 + c^2 m_2 = E \tag{1}$$
$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{P} \tag{2}$$
$$\frac{E_1^2}{c^2} = c^2 m_1^2 + p_1^2 \tag{3}$$
$$\frac{E^2}{c^2} = c^2 M^2 + P^2 \tag{4}$$

Energia E on suoraan yhtälön (1) mukaan

$$\underline{\underline{E = E_1 + c^2 m_2}} \tag{5}$$

Ratkaistaan seuraavaksi liikemäärä P. Lähdetään liikkeelle yhtälöstä (3):

$$\begin{aligned} \frac{E_1^2}{c^2} &= c^2 m_1^2 + p_1^2 \\ p_1^2 &= \frac{E_1^2}{c^2} - c^2 m_1^2 \\ p_1 &= \sqrt{\frac{E_1^2}{c^2} - c^2 m_1^2} \end{aligned}$$

Sijoittamalla saatu p_1 yhtälöön (2) saadaan lopullinen liikemäärän kaava

$$\underline{\underline{P = \sqrt{\frac{E_1^2}{c^2} - c^2 m_1^2}}} \tag{6}$$

Massa M saadaan selville yhtälöstä (4):

$$\begin{aligned} \frac{E^2}{c^2} &= c^2 M^2 + P^2 \\ M^2 &= \frac{1}{c^2}\left(\frac{E^2}{c^2} - P^2\right) \\ M &= \frac{1}{c}\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - P^2} \end{aligned}$$

Sijoitetaan yhtälöön aiemmin ratkaistut energia E (yhtälö 5) ja liikemäärä P (yhtälö 6).

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{c}\sqrt{\frac{(E_1 + c^2 m_2)^2}{c^2} - \left(\sqrt{\frac{E_1^2}{c^2} - c^2 m_1^2}\right)^2} \\ M &= \frac{1}{c}\sqrt{\frac{E_1^2 + 2E_1 c^2 m_2 + c^4 m_2^2}{c^2} - \frac{E_1^2}{c^2} - c^2 m_1^2} \\ M &= \frac{1}{c}\sqrt{\frac{E_1^2 + 2E_1 c^2 m_2 + c^4 m_2^2 - E_1^2 - c^4 m_1^2}{c^2}} \end{aligned}$$

Lopullinen massan M yhtälö:

$$\underline{\underline{M = \sqrt{m_1^2 + \frac{2E_1 m_2}{c^2} + m_2^2}}} \tag{7}$$

Nopeus u saadaan liikemäärän P määritelmän (yhtälö 6) avulla, kun tiedetään, että

$$P = \frac{E}{c^2} u. \tag{8}$$

Yhdistämällä yhtälöt (6) ja (8) saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{E}{c^2}u &= \sqrt{\frac{E_1^2}{c^2} - m_1^2c^2} \\
u &= \frac{c^2}{E}\sqrt{\frac{E_1^2}{c^2} - m_1^2c^2} \\
u &= \sqrt{\frac{c^4}{E^2}\left(\frac{E_1^2 - m_1^2c^4}{c^2}\right)}
\end{aligned}$$

Sijoitetaan energia $E = E_1 + c^2m_2$

$$\begin{aligned}
u &= \sqrt{\frac{c^2(E_1^2 - m_1^2c^4)}{(E_1 + c^2m_2)^2}} \\
\underline{\underline{u}} &= \underline{\underline{\frac{c\sqrt{(E_1^2 - m_1^2c^4)}}{E_1 + c^2m_2}}}
\end{aligned} \tag{9}$$

2. **Fotonipari** Lasketaan siis systeemin kokonaisneliliikemäärä p^μ_{tot}. Kokonaisneliliikemäärä on summa hiukkasten neliliikemääristä, eli $p^\mu_{\text{tot}} = p^\mu_{\text{A}} + p^\mu_{\text{B}}$, missä p^μ_{A} ja p^μ_{B} ovat tehtävän x- ja y-akselien suuntaan kulkevien fotonien neliliikemäärät.

Yhdelle fotonille, $p^\mu = (E/c, E/c \cdot \hat{\boldsymbol{n}})$, missä $\hat{\boldsymbol{n}}$ on fotonin kulkusuuntaan osoittava vektori ja E fotonin energia. Fotonille, joka kulkee x-akselin suuntaan, saadaan siis

$$p^\mu_{\text{A}} = \left(\frac{E_1}{c}, \frac{E_1}{c}, 0, 0\right),$$

missä $E_1 = 100$ MeV. Vastaavasti y-akselin suuntaan kulkevalle saadaan

$$p^\mu_{\text{B}} = \left(\frac{E_2}{c}, 0, \frac{E_2}{c}, 0\right),$$

missä $E_2 = 200$ MeV.

Kokonaisneliliikemäärä on siis

$$\begin{aligned}
p^\mu_{\text{tot}} &= p^\mu_{\text{A}} + p^\mu_{\text{B}} \\
&= \left(\frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c}, \frac{E_1}{c}, \frac{E_2}{c}, 0\right) \\
&= \underline{\underline{\left(300\frac{\text{MeV}}{c}, 100\frac{\text{MeV}}{c}, 200\frac{\text{MeV}}{c}, 0\right)}}.
\end{aligned}$$

Kokonaisenergia on kokonaisneliliikemäärän ajanlaatuinen eli nollas komponentti (kertaa c): $E_{\text{tot}} = 300$ MeV. Kokonaisliikemäärä on kokonaisneliliikemäärän avaruusosa, $\boldsymbol{p}_{\text{tot}} = (100\ \text{MeV}/c, 200\ \text{MeV}/c, 0)$.

Massa (lepomassa) saadaan suoraan neliliikemäärästä. Muistetaan, neliliikemäärän pituus on massa kertaa c, $\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = m^2c^2$. Neliliikemäärän p^μ_{tot} omaavan hiukkasen massa saadaan siis seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu}p^\mu_{\text{tot}}p^\nu_{\text{tot}} &= (p^0_{\text{tot}})^2 - (p^1_{\text{tot}})^2 - (p^2_{\text{tot}})^2 - (p^3_{\text{tot}})^2 \\
&= 90000\frac{\text{MeV}^2}{c^2} - 10000\frac{\text{MeV}^2}{c^2} - 40000\frac{\text{MeV}^2}{c^2} \\
&= 40000\frac{\text{MeV}^2}{c^2} \\
&= m^2c^2.
\end{aligned}$$

Ratkaisemalla m saadaan

$$m = \underline{\underline{200\frac{\text{MeV}}{c^2}}}.$$

Hiukkasen nopeus saadaan esimerkiksi kaavasta

$$\boldsymbol{p} = \frac{E}{c^2}\boldsymbol{u}.$$

Ratkaisemalla $\boldsymbol{u}$ ja sijoittamalla lukuarvot saadaan

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= \frac{c^2}{E_{\text{tot}}}\boldsymbol{p} \\ &= \frac{c^2}{300\text{ MeV}}(100\text{ MeV}/c, 200\text{ MeV}/c, 0) \\ &= \underline{\underline{\left(\frac{1}{3}c, \frac{2}{3}c, 0\right)}}.\end{aligned}$$

Nopeuden suuruus on siis $u = \sqrt{(1/3)^2 + (2/3)^2}c = \sqrt{5}c/3$, ja suunta sama kuin vektorin $(1, 2, 0)$.

3. **Säteilypaine** Olkoon peili y, z-tasossa, ja olkoon peiliä lähestyvän fotonin liikemäärä $\boldsymbol{p}_{\text{in}} = (p, 0, 0)$. Heijastuttuaan peilistä, se poistuu liikemäärällä $\boldsymbol{p}_{\text{out}} = (-p, 0, 0)$, jättäen liikemäärän

$$\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{\text{out}} - \boldsymbol{p}_{\text{in}} = (-2p, 0, 0)$$

peilille. Koska fotonin energia on $E_f = pc$, on yhden fotonin aiheuttama liikemäärän muutos

$$\Delta p = 2p = 2E_f/c.$$

Kaikkien peiliin osuvien fotonien aiheuttama liikemäärän muutos on näin ollen

$$\Delta p_{tot} = 2\Delta E/c,$$

missä Δp_{tot} on jossain ajassa Δt aiheutunut liikemäärän muutos ja ΔE samassa ajassa peiliin osuneiden elektronien energioiden summa.

Koska säteilyteho on $P = \Delta E/\Delta t$ ja voima $F = \Delta p_{tot}/\Delta t$, saadaan jakamalla ylläoleva yhtälö Δt:llä

$$F = \frac{2}{c}P.$$

Peilin pinta-ala on $A = 1\text{ m}^2$, ja siten $P = 1.3\text{ kW/m}^2 \cdot A = 1.3\text{ kW}$. Sijoitetaan tämä ja c, jolloin saadaan

$$F = \frac{2}{3 \times 10^8\text{ m/s}} \cdot 1.3\text{ kW} \approx \underline{\underline{8.7 \times 10^{-6}\text{ N.}}}$$

4. **Dopplerin ilmiö**

(a) Ääni tarvitsee edetäkseen aina jonkin väliaineen. Lähtevän ja saapuvan äänen havaittuun taajuuteen vaikuttaa siten sekä lähteen ja havaitsijan nopeudet väliaineen suhteen.

Valon nopeus, sitä vastoin, ei tarvitse väliainetta edetäkseen. Sen nopeus on vakio kaikille havaitsijoille.

(b) Käytetään luennoissa johdettua kaavaa Dopplerin ilmiölle, kun valonlähde liikkuu havaitsijaa kohti:

$$\nu = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}\nu'. \tag{10}$$

Taajuuksien ν, ν' ja vastaavien aallonpituuksien λ, λ' suhteet ovat $\nu = c/\lambda$, $\nu' = c/\lambda'$. Kaavasta (10) saadaan λ:oille

$$\lambda = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}\lambda'.$$

Tässä $\lambda = 540$ nm ja $\lambda' = 630$ nm. Ylläolevasta yhtälöstä tulee siis ratkaista v:

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 = \frac{1 - v/c}{1 + v/c} \quad \Rightarrow \quad \left(1 + \frac{v}{c}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 = 1 - \frac{v}{c} \quad \Rightarrow \quad \left[1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)\right]\frac{v}{c} = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2$$

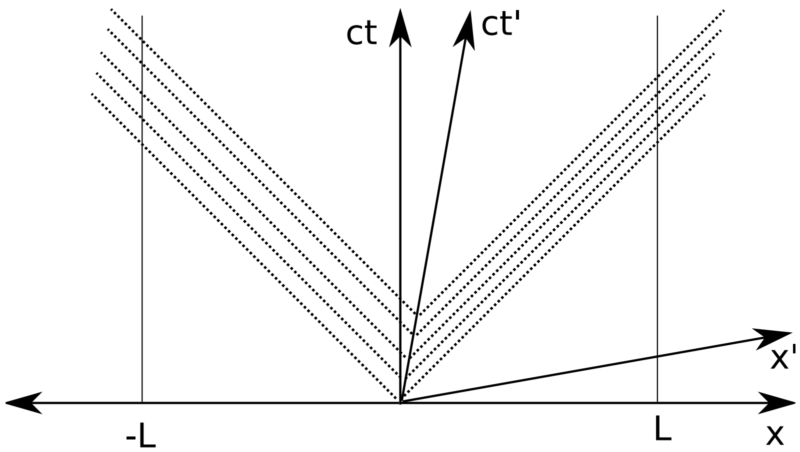
$$\Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \underline{\underline{\frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2}{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2}}}.$$

Sijoittamalla lukuarvot saadaan

$$v \approx \underline{\underline{0.15c.}}$$

5. **Valopulssit**

(a)



Minkowski diagrammi tilanteesta: Valonvälähdykset (katkoviivat) tapahtuvat liikkuvassa koordinaatistossa pisteessa $x' = 0$ tasavälein, mutta auton edessä oleva havaitsija ($x = L$) havaitsee lyhyemmät ja auton takana $x = -L$ oleva havaitsija pitemmät aikavälit valonvälähdyksille.

(b) Paloauton mukana liikkuvassa koordinaatistossa K' välähdyshetkien koordinaatit ovat

$$x'_n = 0 \qquad\qquad t'_n = n\tau',$$

jotka ovat paikallaan pysyvän tarkkailijan koordinaatistossa K:

$$x_n = \frac{x'_n + vt'_n}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{nv\tau'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad\qquad t_n = \frac{t'_n + \frac{v}{c^2}x'_n}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{n\tau'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Valopulssien saapumishetket $\widetilde{t}_n$ tarkkailijan luo ovat

$$\widetilde{t}_n = t_n + \frac{L - x_n}{c}, \tag{11}$$

missä jälkimmäinen osuus on aika, joka valolta kuluu matkaan autosta tarkkailijan luo. Tarkastellaan kahden peräkkäisen saapumishetken aikaerotusta τ tarkkailijan koordinaatistossa tarkkailijan luona:

$$\tau = \widetilde{t}_{n+1} - \widetilde{t}_n = \tau' \frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(c) Loittonevan auton tilanteessa ($v \to -v$) välähdysten saapumishetkien aikaerotus on

$$\tau = \tau' \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

jonka voi päätellä siitä, että lasku on muuten samalainen kuin a)-kohdassa, mutta kaavassa (11) vaihtuu merkki x_n edessä. Havaitsijan ja paloauton etäisyys on siis $L + x_n$.

(d) Taajuksille pätee

$$\nu = \nu' \sqrt{\frac{1 \pm v/c}{1 \mp v/c}},$$

missä ylemmät merkit on lähestyvälle ja alemmat loittonevalle autolle. Esimerkiksi loittonevalle autolle saadaan johdettua yllä oleva lauseke seuraavasti (vastaavanlaisesti saadaan myös lähenevän auton tapaus)

$$\begin{aligned}
\nu &= \frac{1}{\tau} \\
&= \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{1+v/c} \frac{1}{\tau'} \\
&= \sqrt{\frac{(1+v/c)(1-v/c)}{(1+v/c)^2}} \nu' \\
&= \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} \nu'.
\end{aligned}$$