1. **Rekyyli**

(a) Luentomonisteessa on käsitelty tilanne, jossa hiukkanen (massa M) hajoaa kahdeksi hiukkaseksi (massat m_1 ja m_2). Tässä käytetään osin monisteessa johdettuja kaavoja, ja asetetaan $m_2 = 0$, koska emittoitunut hiukkanen on fotoni. Lasketaan tässä erityisesti rekyylinopeus u.

Lähdetään hajonneen hiukkasen liikemäärästä, joka, kuten on nähty, voidaan lausua hiukkasen energian E_1 ja nopeuden u avulla:

$$p = \frac{E_1}{c^2}u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{pc^2}{E_1}.$$

Liikemäärän säilymisestä saadaan, että p on sama kuin emittoidun fotonin energia E_2 (jaettuna c:llä):

$$u = \frac{E_2}{E_1}c. \tag{1}$$

Energian säilymisestä, $Mc^2 = E_1 + E_2$ saadaan, että $E_1 = Mc^2 - E_2$:

$$u = \frac{E_2}{Mc^2 - E_2}c. \tag{2}$$

Sijoitetaan tähän luentojen kaava E_2:lle,

$$E_2 = \frac{M^2 - m_1^2}{2M}c^2,$$

jolloin saadaan

$$u = \frac{(M^2 - m_1^2)c^2/2M}{Mc^2 - (M^2 - m_1^2)c^2/2M}c = \cdots = \underline{\underline{\frac{M^2 - m_1^2}{M^2 + m_1^2}c.}} \tag{3}$$

(b) Approksimaatio $u \approx Q/cM$ voidaan osoittaa monella tavalla.

Tapa 1 Ehdosta $Q \ll Mc^2$ seuraa, että $(M - m_1)c^2 \ll Mc^2$, eli $(M - m_1) \ll M$. Tämä tarkoittaa, että $(M - m_1)/M \ll 1$ ja $m_1 \approx M$.
Näin rekyylinopeuden lausekkeesta (5) saadaan

$$u = \frac{(M^2 - m_1^2)c}{M^2 + m_1^2} = \frac{(M - m_1)c^2 \cdot (M + m_1)}{(M^2 + m_1^2)c} \approx \frac{Q \cdot 2M}{2M^2 c} = \underline{\underline{\frac{Q}{cM}}}$$

Tapa 2 Voidaan myös lähteä myös lähteä liikkeelle kaavasta (2):

$$u = \frac{E_2}{Mc^2 - E_2}c,$$

jossa approksimoidaan, että rekyylienergia E_{1kin} on pieni, eli $E_2 = Q - E_{1kin} \approx Q$. Näin saadaan ehto

$$u = \frac{Qc}{Mc^2 - Q},$$

jossa $Q \ll Mc^2$, joten

$$\underline{\underline{u = \frac{Q}{Mc}}}.$$

Tapa 3 Sama tulos saadaan myös suoraan liikemäärän säilymislaista

$$\mathbf{p} = \mathbf{p_1} + \mathbf{p_2}$$
$$0 = p_1 - p_2$$
$$p_1 = p_2$$

Nyt liikemäärä $p_1 \approx m_1 u \approx Mu$ ja $p_2 = E_2/c$. Lisäksi jätetään taas rekyylienergia E_{1kin} huomiotta, joten $E_2 \approx Q$. Tällöin

$$Mu = \frac{Q}{c}$$
$$\underline{\underline{u = \frac{Q}{cM}}}$$

(c) Lasketaan, kuinka suuri energiamäärä vapautuu, kun pariston koko varaus purkautuu.
Vapautuva sähköinen energia E voidaan ilmaista purkautumistehon P ja purkautumisajan Δt avulla:

$$E = P\Delta t,$$

missä teho riippuu purkautuvasta sähkövirrasta ja jännitteestä yhtälön $P = UI$ mukaisesti.

$$E = UI\Delta t.$$

Sähkövirta puolestaan määritellään purkautuvana sähkövarauksena q aikayksikköä kohti, joten purkautuvaksi energiaksi saadaan

$$E = U \cdot \frac{q}{\Delta t} \cdot \Delta t = qU.$$

AA-pariston jännite on $U = 1.5\text{V}$ ja purkautuva sähkövaraus on $q = 3000\text{mAh} = 3\text{Ah} = 3 \cdot 3600\text{C}$, joten purkautuvaksi energiaksi saadaan

$$E = 3 \cdot 3600\text{C} \cdot 1.5\text{V} = 16200\text{J}. \tag{4}$$

Tilannetta voidaan yksinkertaistaa ajattelemalla, että taskulamppu lähettää yhden fotonin, jonka energia on $E = 16200\text{J}$. Samalla lamppu kokee rekyylin ja saa nopeuden

$$u = \frac{Q}{cM} \approx \frac{E}{cM} = \frac{16200\text{J}}{2.988 \cdot 10^8\text{m/s} \cdot 0.025\text{kg}} = 2.161440961 \cdot 10^{-3}\text{m/sm/s} \approx \underline{\underline{2.2\text{mm/s}}}$$

2. **Rekyylin kompensointi**

(a) Tarkastellaan tilannetta alkuperäisen ytimen koordinaatistossa K', joka liikkuu nopeudella v laboratoriokoordinaatiston K suhteen.
Tässä koordinaatistossa ytimen saama rekyylienergia on (fotonille $m_2 = 0$)

$$E'_{rek} = \frac{(M - m_1)^2 - m_2}{2M} c^2 = \frac{(M - m_1)^2 c^4}{2Mc^2} = \frac{Q^2}{2Mc^2}. \tag{5}$$

Emittoituneen fotonin energia on tällöin

$$E'_f = h\nu' = Q - E'_{rek}. \tag{6}$$

Laboratoriokoordinaatistossa fotonin energian tulee olla suoraan

$$E_f = h\nu = Q, \tag{7}$$

eli rekyylistä johtuva energian pienennys voidaan jättää huomiotta, kun ytimen alkuperäinen nopeus on sopiva. Selvitetään ytimen (eli K':n) nopeus käyttämällä hyväksi dopplerin siirtymän kaavaa

$$\nu = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}\nu'. \tag{8}$$

Kertomalla yhtälö (8) vakiolla h saadaan fotonin energioiden välille yhteys

$$h\nu = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}h\nu'$$
$$E_f = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}E_f'$$

Sijoitetaan tähän fotonin energiat koordinaatistoissa K ja K'.

$$Q = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}(Q - E_{rek}')$$
$$\frac{Q}{Q - E_{rek}'} = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} \tag{9}$$

Approksimoimalla neliöjuuritermiä Taylorin sarjalla saadaan

$$\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} \approx 1 + \frac{v}{c},$$

ja sijoitetaan saatu tulos yhtälöön (9).

$$\frac{Q}{Q - E_{rek}'} = 1 + \frac{v}{c}$$
$$v = \left(\frac{Q}{Q - E_{rek}'} - 1\right)c$$
$$v = \left(\frac{Q}{Q - E_{rek}'} - \frac{Q - E_{rek}'}{Q - E_{rek}'}\right)c$$
$$v = \frac{E_{rek}'}{Q - E_{rek}'}c$$

Nyt $E_{rek}' \ll Q$, joten nopeudeksi saadaan

$$v \approx \frac{E_{rek}'c}{Q}$$
$$v = \frac{Q^2c}{Q2Mc^2} = \underline{\underline{\frac{Q}{2Mc}}}$$

(b) Fotonin energia saadaan yhtälöstä

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}\text{J} \cdot 2.998 \cdot 10^{8}\text{m/s}}{589.5 \cdot 10^{-9}\text{m}} \approx 3.3697 \cdot 10^{-19}\text{J} \tag{10}$$

Koska nyt ei tarvitse ottaa huomioon rekyylienergiaa, fotonin energia on suoraan energiatilojen erotus, eli $E = Q$.

Ytimen massa on $M = 23.0\text{u} = 23.0 \cdot 1.661 \cdot 10^{-27}\text{kg} = 3.819239518 \cdot 10^{-26}\text{kg}$

Rekyylinopeus on siis

$$u \approx \frac{Q}{2cM} = \frac{3.3697 \cdot 10^{-19}\text{J}}{2 \cdot 2.998 \cdot 10^{8}\text{m/s} \cdot 3.819239518 \cdot 10^{-26}\text{kg}} = 0.0147148 \approx \underline{\underline{15\text{mm/s}}}$$

(c) Nyt rauta-atomin massa on $M = 56.853\text{u} = 9.43816653 \cdot 10^{-26}\text{kg}$, ja gammakvantin energia on $Q = 14.4\text{kEv} = 2.307168 \cdot 10^{-15}\text{J}$. Atomin rekyylinopeus on siis

$$u \approx \frac{Q}{2cM} = \frac{2.307168 \cdot 10^{-15}\text{J}}{2 \cdot 2.998 \cdot 10^{8}\text{m/s} \cdot 9.43816653 \cdot 10^{-26}\text{kg}} = 40.75821441\text{m/s} \approx \underline{\underline{41\text{m/s}}}$$

3. **Fotoniraketti** Sovelletaan rekyylinopeudelle saatua kaavaa

$$\frac{v}{c} = \frac{M^2 - m_1^2}{M^2 + m_1^2}. \tag{11}$$

Tästä kaavasta saadaan suoraviivaisesti ratkaistua kysytty massasuhde $\mu = m_1/M$:

$$\frac{v}{c} = \frac{M^2(1 - m_1^2/M^2)}{M^2(1 + m_1^2/M^2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \quad \Rightarrow \quad (1+\mu^2)\frac{v}{c} = 1 - \mu^2$$
$$\Rightarrow \quad \left(1 + \frac{v}{c}\right)\mu^2 = 1 - \frac{v}{c} \quad \Rightarrow \quad \mu^2 = \frac{1 - v/c}{1 + v/c}.$$

Eli saadaan

$$\mu = \frac{m_1}{M} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}.}}$$

Sijoittamalla numerarvo $v = 9c/10$ saadaan

$$\frac{m_1}{M} = \sqrt{\frac{1}{19}} \approx \underline{\underline{0.23.}}$$

4. **Kielletyt prosessit**

(a) Säilymisyhtälöt ovat

$$E_1 + E_2 = E \tag{12}$$
$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p} \tag{13}$$

Lisäksi tulevat relaatiot

$$E_1 = c\sqrt{m^2c^2 + p_1^2}, \tag{14}$$
$$E_2 = c\sqrt{m^2c^2 + p_2^2}, \tag{15}$$
$$E = cp. \tag{16}$$

Valitaan koordinaatistoksi elektronin ja positronin massakeskipistekoordinaatisto, jolloin $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = 0$. Liikemäärän säilymisyhtälöstä seuraa että $\boldsymbol{p} = 0$. Lisäksi tiedetään että fotonille $E = cp$, mistä päätellään että $E = 0$. Energian säilyminen voidaan nyt kirjoittaa

$$c\sqrt{m^2c^2 + p_1^2} + c\sqrt{m^2c^2 + p_1^2} = 0. \tag{17}$$

Koska vasen puoli on minimissään $2mc^2$, energian säilymisyhtälö ei toteudu. Prosessi on siten kielletty.
Huom! Elektroni ja positroni voivat annihiloitua kahdeksi fotoniksi.

(b) Säilymisyhtälöt ovat kuten a-kohdassa mutta lisäksi tulevat relaatiot

$$E_1 = c\sqrt{m^2c^2 + p_1^2}, \tag{18}$$
$$E_2 = cp_2, \tag{19}$$
$$E = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}. \tag{20}$$

Valitaan koordinaatistoksi lopputilan elektronin lepokoordinaatisto, jolloin $\boldsymbol{p} = 0$. Liikemärän säilyminen vaatii että $\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2$. Tästä päätellään että $p_1 = E_2/c$. Energian säilyminen voidaan nyt kirjoittaa

$$\sqrt{m^2c^4 + E_2^2} + E_2 = mc^2. \tag{21}$$

Tämä yhtälö voi toteutua vain jos $E_2 = 0$, sillä E_2:n nollasta poikkeava arvo voi vain suurentaa yhtälön vasenta puolta oikean pysyessä vakiona. $E_2 = 0$ vastaa fotonia jota ei ole, joten kuvattu prosessi on mahdoton.

Huom! Tämä absorptioprosessi on mahdollinen, jos elektroni korvataan esimerkiksi atomilla. Tällöin prosessissa kasvanut lepomassa selittyisi atomin virittymisellä. Elektronilla ainoa sisäinen vapausaste on spin, mutta molemmat spintilat ovat samalla energialla (jos elektroni ei ole magneettikentässä). Koska virittyneitä tiloja ei ole, elektronin massan kasvaminen on mahdotonta.

5. **Sirontakulma.**

Kahden hiukkasen sirontaongelma on käsitelty luentomonisteessa. Siellä, laboratoriokoordinaatiston neliliikemäärät on lausuttu massakeskuskoordinaatiston neliliikemäärien avulla. Tässä kuitenkin tarvitaan vain sirontakulmaa θ. Se (tai sen tangentti) saadaan monisteen kaavoista

$$\begin{aligned} p_c \cos\theta &= \gamma\left(\frac{v}{c}E_a^*/c + p_a^*\cos\theta^*\right), \\ p_c \sin\theta &= p_a^*\sin\theta^*. \end{aligned}$$

Jakamalla toinen ensimmäisellä saadaan:

$$\tan\theta = \frac{1}{\gamma}\frac{p_a^*\sin\theta^*}{\frac{v}{c}E_a^*/c + p_a^*\cos\theta^*}.$$

Koska massakeskuskoordinaatistossa sirontakulma on 90°, ts. $\theta = \pi/2$, ja $p_a^* = E_a^* u^*/c^2$, ja $v = u^*$, saadaan

$$\tan\theta = \frac{1}{\gamma}\frac{E_a^* u^*/c^2}{vE_a^*/c^2} = \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-(u^*/c)^2}.$$