

1. Kirjoita yksinkertaisen heilurin (massa  $m$ , langan pituus  $l$ , värähdys yhdessä tasossa) Lagrangen funktio. Määää Lagrangen funktio pienten värähtelyjen aproksiimaatiossa ja laske värähtelytaajuus.
2. Tutkitaan pieniin värähtelyihin liittyvää ominaisarvo ongelmaa. Osoita todeksi luennolla esitetyt väittämät:
  - a) Ominaisvektorit ovat ortonormaalisia matriisin  $A$  mielessä.
  - b) Ominaisarvot  $\omega^2$  ovat reaalisia.
3. Tutkitaan yksinkertaista heiluria tapauksessa, jossa lanka onkin venyvä (jousivakio  $k$ , langan pituus venyttämättömänä  $l_0$ ). Muodosta pienten värähtelyjen Lagrangen funktio ja määrää ominaistajuudet.
4. Yhdestä pisteestä kiinnitetty ohut vanne (säde  $R$ , massa  $m$ ) oskilloi omassa tasossa. Liitetään vanteeseen massa piste  $M$ , joka liikkuu ilman kitkaa vannetta pitkin. Systeemi on vakio gravitaatio kentässä  $\mathbf{g}$ . Käsitellään vain pieniä värähtelyjä.
  - a) Osoita, että normaali-moodien taajuudet ovat

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{2g}{R} \right)^{1/2}, \quad \omega_2 = \left( \frac{2g}{R} \right)^{1/2}$$

- b) Etsi normaali-moodien ominaisfunktio. Piirrä liikkeestä kuvaaja.
5. Osoita, että pienten värähtelyjen tapauksessa siirtyminen normaalikoordinaatteihin johtaa luennolla esitettyyn Lagrangen funktion muotoon.