

1. Tutki jousilla ketjuksi kytkettyjä massoja, jotka voivat värähdellä tasossa (siis sekä poikittais- että pitkittäissuunnassa). Osoita, että pienille värähtelyille voidaan kirjoittaa

$$L = \frac{1}{2} \sum_i \left[m(\dot{\eta}_i^2 + \dot{\mu}_i^2) - \frac{k}{2}(\eta_{i+1} - \eta_i)^2 - \frac{\tau}{2a}(\mu_{i+1} - \mu_i)^2 \right] + \text{vakio},$$

missä η_i ja μ_i ovat massojen pitkittäiset ja poikittaiset poikkeamat tasapainoasemastaan. Totea tästä, että pitkittäiset ja poikittaiset värähtelyt tapahtuvat toisistaan riippumatta. Kirjoita dispersiorelaatiot molemmille ja määrää pitkääaltoisten värähtelyjen etenemisnopeudet c_{\parallel} ja c_{\perp} .

2. Lineaarinen ketju muodostuu $2N$:stä samalla etäisyydellä a olevista identtisistä m -massaisista hiukkasista. Massoja sitovien jousien vuorottelevat vakiot ovat k_1 ja k_2 .
- a) Käytä periodista systeemiä löytääksesi dispersiorelaatio ja kirjoita funktio $\omega(q)$ (Vihje: Oleta, että $\eta_{2j} = \alpha \exp[i2jq a]$ ja $\eta_{2j+1} = \beta \exp[i(2j+1)qa]$). Tutki raja-arvoja tapauksissa, kun $k_1 \rightarrow 0$, $k_2 \rightarrow \infty$ ja $k_1 \rightarrow k_2$.
- b) Käytä periodisia reunaehtoja löytääksesi sallitut taajuudet.

- 3–4. Kaksiulotteiden neliöllinen rakennelma muodostuu $2N$:stä massattomasta $(N+1)a$ lepopituisista jousista, joiden päätepisteet ovat kiinnitetyt. Jousia on venytetty voimalla τ ja massapisteet m sijaitsevat jokaisessa risteyksessä (ia, ja) , missä $1 \leq i, j \leq N$.
- a) Määrää liikeyhtälöt ja Lagrangen yhtälö pienille massojen poikittaisille poikkeamille η_{ij} . Etsi eksakti dispersiorelaatio $\omega(\mathbf{k})$ aaltoliikkeelle, jolle aaltovektori on $\mathbf{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y}$.
- b) Osoita, että jatkumorajalla systeemi toteuttaa kaksiulotteista aaltoyhtälöä. Mikä on vastaava dispersiorelaatio aaltoliikkeelle?
- c) Demonstroi eksplisiittisesti, että dispersiorelaatio diskreetissä tapauksessa on anisotrooppinen xy -tasossa kun taas jatkumo on isotrooppinen. Tarkastele tulosta.
- d) Äärellisissä systeemeissä ($N < \infty$), löydä eksakti ominaisvärähtelytaajuus ja vertaa sitä jatkumorajaan.
- e) Johda jatkuvalla systeemille Lagrangen yhtälö ja liikeyhtälöt suoraan yhtälöstä $L = T - V$.