1. Tutki jousilla ketjuksi kytkettyjä massoja, jotka voivat värähdellä tasossa (siis sekä poikittais- että pitkittäissuunnassa). Osoita, että pienille värähtelyille voidaan kirjoittaa

$$L = \frac{1}{2}\sum_i \left[m(\dot{\eta_i}^{\,2} + \dot{\mu_i}^{\,2}) - \frac{k}{2}(\eta_{i+1} - \eta_i)^2 - \frac{\tau}{2a}(\mu_{i+1} - \mu_i)^2 \right] + vakio\,,$$

missä η_i ja μ_i ovat massojen pitkittäiset ja poikittaiset poikkeamat tasapainoasemastaan. Totea tästä, että pitkittäiset ja poikittaiset värähtelyt tapahtuvat toisistaan riippumatta. Kirjoita dispersiorelaatiot molemmille ja määrää pitkäaaltoisten värähtelyjen etenemisnopeudet $c_\parallel$ ja $c_\perp$.

2. Lineaarinen ketju muodostuu $2N$:stä samalla etäisyydellä a olevista identisistä m-massaisista hiukkasista. Massoja sitovien jousien vuorottelevat vakiot ovat k_1 ja k_2.
a) Käytä periodista systeemiä löytääksesi dispersiorelaatio ja kirjoita funktio $\omega(q)$ (Vihje: Oleta, että $\eta_{2j} = \alpha \exp[i2jqa]$ ja $\eta_{2j+1} = \beta \exp[i(2j+1)qa]$). Tutki rajaarvoja tapauksissa, kun $k_1 \to 0$, $k_2 \to \infty$ ja $k_1 \to k_2$.
b) Käytä periodisia reunaehtoja löytääksesi sallitut taajuudet.

3.–4. Kaksiulotteien neliöllinen rakennelma muodostuu $2N$:stä massattomasta $(N+1)a$ lepopituisista jousista, joiden päätepisteet ovat kiinnitetyt. Jousia on venytetty voimalla τ ja massapisteet m sijaitsevat jokaisessa risteyksessä (ia, ja), missä $1 \le i, j \le N$.
a) Määrää liikeyhtälöt ja Lagrangen yhtälö pienille massojen poikittaisille poikkeamille η_{ij}. Etsi eksakti dispersiorelaatio $\omega(\mathbf{k})$ aaltoliikkeelle, jolle aaltovektori on $\mathbf{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{t}$.
b) Osoita, että jatkumorajalla systeemi tottelee kaksiulotteista aaltoyhtälöä. Mikä on vastaava dispersiorelaatio aaltoliikkeelle?
c) Demonstroi eksplisiittisesti, että disperssiorelaatio diskreetissä tapauksessa on anisotrooppinen xy-tasossa kun taas jatkumo on isotrooppinen. Tarkastele tulosta.
d) Äärellisissä systeemeissä ($N < \infty$), löydä eksakti ominaisvärähtelytaajuus ja vertaa sitä jatkumorajaan.
e) Johda jatkuvalle systeemille Lgrangen yhtälö ja liikeyhtälöt suoraan yhtälöstä $L = T - V$.