

KLASSINEN KENTTÄTEORIA  
763629S

Erkki Thuneberg

Fysikaalisten tieteiden laitos  
Oulun yliopisto  
2005

# 1. Klassinen kenttäteoria: johdanto

Kurssin nimessä *klassinen* tarkoittaa vastakohtaa kvanttimekaaniselle. *Kenttä* taas yleisesti tarkoittaa jotain suuretta joka riippuu paikasta ja mahdollisesti ajasta,  $f = f(\mathbf{r}, t)$ . Luonnossa esiintyviä klassisia kenttiä ovat

- materian muodostama kenttä makroskooppisella mitataavalla
- sähkömagneettinen kenttä
- painovoimakenttä

Tässä kurssissa tutkitaan vain kahta ensin mainittua tapusta. Painovoimakentän tarkempi tutkiskelu johtaa yleiseen suhteellisuusteoriaan, joka laajuutensa vuoksi on parempi erottaa omaksi kurssikseen.

Seuraavassa on lueteltu muutamia tässä kurssissa käsiteltäviä asioita

- Lagrangen ja Hamiltonin formalismin yleistys jatkuvasti jakautuneeseen materiaan
- Lagrangen ja Hamiltonin formalismin yleistys suuriin hiukkasnopeuksiin (relativistinen teoria)
- sähkömagneettisen kentän Lagrangen ja Hamiltonin formalismi, Maxwellin yhtälöiden ja Lorentzin voiman johto siitä.
- Esimerkkejä sähkömagneettisen kentän teoriasta:
  - energia ja liikemäärä
  - ajasta riippumaton kenttä (vain osittain 05)
  - polarisoituva materia (ei 05)
  - aallot (vain osittain 05)
  - liikkuvien varausten kenttä (vain osittain 05)
- Johdatus kvanttikenttäteoriaan (ei 05)

Vuonna 2005 luennoidaan kurssista lyhennetty versio (3 ov), jossa pois jätettävät osat on merkitty ”ei 05”. Johdatus kvanttikenttäteoriaan on jätetty pois koska se ei kuulu kurssin otsikon alle ja sitä käsitellään Kvanttimekaniikan jatkokurssilla.

## Kirjoja

- L.D. Landau ja E.M. Lifshitz, Course of theoretical physics. Tämän 10-osaisen kirjasarjan tässä kurssissa olennainen osa on *The classical theory of fields* (LL2, tärkein yksittäinen kirja tässä kurssissa). Vähän käytetään myös *Electrodynamics of continuous media* (LL8).
- A.L. Fetter ja J.D. Walecka, Theoretical mechanics of particles and continua (1980) (FW). Jatkuvan aineen mekaniikkaa.

- H. Goldstein, Classical Mechanics (1950, 1980) (G). Klassinen viite, mutta ei juuri käytössä tässä kurssissa.
- W. Panofsky ja M. Phillips, Classical Electricity and Magnetism (1962), (PP).
- J. D. Jackson, Classical Electrodynamics (1962), (J)
- J.J. Sakurai, Advanced quantum mechanics (1967), johdatus kvanttikenttäteoriaan. (ei 05)

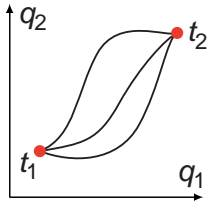
## 2. Analyttisen mekaniikan kertausta

### 2.1 Hamiltonin periaate

Systeemin dynamiikan määrää Lagrangen funktio  $L(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) = T - V$ . Liikerata saadaan siitä käyttäen *Hamiltonin periaatetta*: Olkoon annettuna konfiguraatioavaruuden  $(q_1, \dots, q_n)$  kaksi pistettä, ja niitä vastaavat ajanhetket  $t_1$  ja  $t_2$ . Systeemin liike näiden välillä tapahtuu siten, että vaikutusintegraalilla

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (1)$$

on ääriarvo (minimi).



Hamiltonin periaatteesta voidaan johtaa liikeyhtälöt. Kirjoitetaan vaikutusintegraalin variaatiolle

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

joka siis häviää Hamiltonin periaatteen mukaan. Koska variaatiot  $\delta q_i$  ovat toisistaan riippumattomia ja mielivaltaisia  $t$ :n funktioita, voi lauseke (2) hävitä vain jos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3)$$

Tämä on *Lagrangen liikeyhtälö*.

### 2.2 Pienet värähtelyt

Tutkitaan ajasta ja nopeuksista riippumatonta potentiaalia  $V = V(q_1, \dots, q_n)$ . Lisäksi oletamme että sidosehdot

ja yleistetyt koordinaatit eivät riipu eksplisiittisesti ajasta. Newtonin mekaniikassa kineettinen energia on tällöin neliöllinen funktio  $\dot{q}_i$ :ssä,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij} A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad A_{ij} = \sum_k m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}. \quad (4)$$

Tarkastellaan staattista tasapainoa, jossa  $\ddot{q}_i = \dot{q}_i = 0$  kaikilla  $i$ . Tällöin seuraa Lagrangen yhtälöstä (3) että koordinaateilla  $q_i$  pitää olla sellaiset arvot  $q_i^0$  että kaikki yleistetyt voimat häviävät

$$Q_i = - \left( \frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_{\mathbf{q}^0} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (5)$$

Lisäksi oletetaan että piste  $\mathbf{q}^0$  vastaa  $V$ :n minimiä, niin että tasapainopiste on stabiili. Tutkitaan seuraavaksi pientä muutosta systeemin koordinaateissa

$$q_i = q_i^0 + \eta_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (6)$$

Tavoitteena on laskea  $L$  tarkkuuteen, joka on neliöllinen  $\eta_i$ :ssä ja  $\dot{\eta}_i$ :ssä. Koska  $T$ :n muoto (4) on

eksplisiittisesti neliöllinen  $\dot{q}_i = \dot{\eta}_i$ :ssä, voidaan (yleisesti  $q_i$ -riippuva) kerroinmatriisi laskea tasapainopisteessä:

$$A_{ij} = \sum_k m_k \left( \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right)_{\mathbf{q}^0} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \right)_{\mathbf{q}^0}. \quad (7)$$

Potentiaali  $V$  kehitetään Taylorin sarjaksi. Tässä kehittämässä lineaarinen termi häviää kaavan (5) perusteella, jolloin saadaan

$$V = V_0 + \frac{1}{2} \sum_{ij} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{\mathbf{q}^0} \eta_i \eta_j. \quad (8)$$

Kun merkitään

$$v_{ij} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{\mathbf{q}^0}, \quad (9)$$

saadaan pienten värähtelyjen Lagrangen funktio

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{ij} (A_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - v_{ij} \eta_i \eta_j) - V_0, \quad (10)$$

missä kerroinmatriisit  $A_{ij}$  ja  $v_{ij}$  ovat reaalisia ja symmetrisiä vakiomatriiseja. Lagrangen yhtälöstä (3) saadaan liikeyhtälöt

$$\sum_{j=1}^n (A_{ij} \ddot{\eta}_j + v_{ij} \eta_j) = 0, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (11)$$

Huomataan että neliöllinen Lagrangen funktio johti lineaariseen liikeyhtälöön.

#### Yksinkertainen värähtelijä

Tutkitaan tapausta, jossa on vain yksi yleistetty koordinaatti. Liikeyhtälö (11) redusoituu tällöin muotoon

$$A\ddot{\eta} + v\eta = 0. \quad (12)$$

Tämän fysikaalinen ratkaisu on reaaliarvoinen  $\eta(t)$ . Yhtälöllä on kuitenkin myös kompleksiarvoisia ratkaisuja, ja onkin käytännöllistä käyttää niitä. Kirjoitamme yrittien

$$\eta(t) = C \exp(-i\omega t) = C[\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)]. \quad (13)$$

Tämä toteuttaa yhtälön (12) kun  $\omega = \pm \sqrt{v/A}$ . Yleinen fysikaalinen ratkaisu voidaan luoda käyttäen kumpaa tahansa juurta: tulkitaan fysikaaliseksi ratkaisuksi kompleksisen ratkaisun reaaliosa

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \operatorname{Re}[C \exp(-i\omega t)] \\ &= \operatorname{Re}(C) \cos(\omega t) + \operatorname{Im}(C) \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (14)$$

joka sisältää yleiseltä ratkaisulta vaadittavat kaksi vapaata vakiota  $\operatorname{Re}(C)$  ja  $\operatorname{Im}(C)$ .

Huomaa että yhtälön (12) kompleksisen ratkaisun reaali-osa on aina myös ratkaisu koska yhtälön kertoimet  $A$  ja  $v$  ovat reaalisia:

$$\begin{aligned} A\ddot{\eta} + v\eta &= 0 \\ \Rightarrow 0 &= \operatorname{Re}(A\ddot{\eta} + v\eta) = A \frac{d^2}{dt^2}(\operatorname{Re} \eta) + v \operatorname{Re} \eta. \end{aligned} \quad (15)$$

### Monikomponenttinen värähtelijä

Käytetään yleiseen yhtälöön

$$\sum_j (A_{ij}\ddot{\eta}_j + v_{ij}\eta_j) = 0 \quad (11)$$

samaa tyyppiä olevaa yrittettä kuin yksinkertaisessa tapauksessa:

$$\eta_i(t) = a_i \exp(-i\omega t). \quad (16)$$

Sijoittamalla saadaan

$$\sum_j (v_{ij} - \omega^2 A_{ij})a_j = 0 \quad (17)$$

Vaihtoehtoisesti tämä yhtälö voidaan kirjoittaa myös matriisimuodossa

$$(\mathbf{v} - \omega^2 \mathbf{A})\mathbf{a} = 0, \quad (17)$$

missä  $\mathbf{v}$  ja  $\mathbf{A}$  ovat  $n \times n$  matriiseja joiden elementit ovat  $v_{ij}$  ja  $A_{ij}$ , ja  $\mathbf{a}$  on  $n$ -komponenttinen pystyvektori jonka komponentit ovat  $a_i$ . Tätä kutsutaan *ominaisarvotehtäväksi*. Seuraavassa luetellaan todistamatta muutamia tämän ratkaisuun liittyviä tuloksia, olettaen että ne käydään tarkemmin läpi matematiikan kursseissa.

Yhtälöllä (17) on nollasta poikkeava ratkaisu  $\mathbf{a}$  vain silloin kun  $\mathbf{a}$ :ta kertovan matriisin determinantti häviää:

$$\det(\mathbf{v} - \omega^2 \mathbf{A}) = 0. \quad (18)$$

Tämä on  $n$ :nnen asteen polynomi yhtälö  $\omega^2$ :lle. Sen juurina saadaan  $n$  kappaletta ominaisarvoja  $\omega_s^2$  ( $s = 1, \dots, n$ ). Kerroinmatriisien reaalisuuden ja symmetrisyyden takia kaikki juuret ovat reaalisia. Nämä ominaisarvot antavat systeemin pienten värähtelyjen taajuuudet. Vastaten jokaista

juurta  $\omega_s^2$ , löytyy reaalin ominaisvektori  $\mathbf{a}^{(s)}$ , joka antaa yhtälön (17) ratkaisun tällä taajuudella. Erisuuria ominaisaajuuksia vastaavat ominaisvektorit ovat ortogonaalisia seuraavan kaavan mielessä

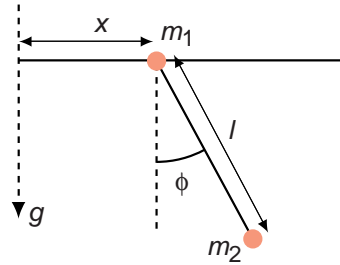
$$\sum_{ij} a_i^{(s)} A_{ij} a_j^{(u)} = \delta_{su} \Leftrightarrow (\mathbf{a}^{(s)})^T \mathbf{A} \mathbf{a}^{(u)} = \delta_{su}. \quad (19)$$

Sen lisäksi, kaikki ominaisvektorit voidaan normalisoida niin että tämä kaava toteutuu myös tapauksessa  $s = u$ . Lisäksi, samaan (ns. degeneroituneeseen) ominaisarvoon liittyvät ominaisvektorit voidaan valita niin että ne ovat ortogonaalisia. Ts. yhtälö (19) voidaan vaatia kaikissa tapauksissa.

Kun ominaistajuuudet  $\omega_s$  ja ominaisvektorit  $\mathbf{a}_i^{(s)}$  on löydetty, voidaan liike yhtälön (11) yleinen fysikaalinen ratkaisu kirjoittaa

$$\eta_i(t) = \operatorname{Re} \sum_{s=1}^n C_s a_i^{(s)} \exp(-i\omega_s t), \quad (20)$$

missä  $\operatorname{Re}(C_s)$  ja  $\operatorname{Im}(C_s)$  muodostavat tarvittavat  $2n$  kappaletta vapaita reaalisia vakioita. Systeemin liike siis muodostuu värähtelymoodeista ( $n$  kappaletta), jotka värähtelevät toisistaan riippumattomasti omilla taajuuksillaan  $\omega_s$ .



**Esim.** Tutkitaan tasoheiluria, jonka kiinnityskohdassa on massa  $m_1$  ja se pääsee vapaasti liukumaan vaakasuunnassa. Tämän Lagrangen funktioksi saadaan laskettua

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2 \dot{\phi}^2 \\ &\quad + m_2 l \dot{x} \dot{\phi} \cos \phi + g m_2 l \cos \phi. \end{aligned} \quad (21)$$

Seuraava vaihe on määrätä tasapainopiste. Siinä  $\phi = 0$ , mutta  $x$  on mielivaltainen. Poikkeamia laskettaessa otetaan mukaan vain neliölliset termit ja saadaan

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2 \dot{\phi}^2 \\ &\quad + m_2 l \dot{x} \dot{\phi} - \frac{1}{2}g m_2 l \phi^2 + \text{vakio}. \end{aligned} \quad (22)$$

Vertaamalla yleiseen kaavaan (10), saadaan yleistettyjä koordinaatteja  $x$  ja  $\phi$  vastaaviksi matriiseiksi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2 l \\ m_2 l & m_2 l^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g m_2 l \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Ominaistajuuudet määräytyvät yhtälöstä

$$\det(\mathbf{v} - \omega^2 \mathbf{A}) = 0. \quad (18)$$

Tämä antaa

$$\omega^2 [g(m_1 + m_2) - \omega^2 l m_1] = 0, \quad (24)$$

eli

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{g(m_1 + m_2)}{lm_1}. \quad (25)$$

Vastaavat (normalisoimattomat) ominaisvektorit ovat

$$\mathbf{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} -m_2 l \\ m_1 + m_2 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

jotka ovat ortogonaalisia kaavan (19) mielessä. Häviävä ominaisarvo johtuu siitä, että systeemi on degeneroitunut translaatioissa  $x$ :n suhteen. Huomataan että toinen ominaistajuus on korkeampi kuin paikalleen kiinnitettyllä heilurilla saatava  $\omega^2 = g/l$ .

### Normaalikoordinaatit (ei 05)

Edellä esitetty yleinen ratkaisu

$$\eta_i(t) = \text{Re} \sum_{s=1}^n C_s a_i^{(s)} \exp(-i\omega_s t) \quad (20)$$

voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$\eta_i(t) = \sum_{s=1}^n a_i^{(s)} \zeta_s(t), \quad (27)$$

Tämä voidaan tulkita koordinaattimuunnokseksi muuttujista  $\eta_i$  muuttujiin  $\zeta_s$ . Muuttujia  $\zeta_s$  kutsutaan *normaalikoordinaateiksi*.

Siirtymällä normaalikoordinaatteihin voidaan pienten värähtelyjen Lagrangen funktio (10) kirjoittaa muotoon

$$L = \frac{1}{2} \sum_s (\dot{\zeta}_s^2 - \omega_s^2 \zeta_s^2). \quad (28)$$

[Harjoitus: Osoita tämä sijoittamalla (27) Lagrangen funktioon (10) ja käyttämällä kaavoja (17) ja (19).] Normaalikoordinaateissa lausuttuna liikeyhtälö ja sen yleinen ratkaisu ovat triviaalit:

$$\ddot{\zeta}_s = -\omega_s^2 \zeta_s, \quad (29)$$

$$\zeta_s(t) = \text{Re}[C_s \exp(-i\omega_s t)], \quad (30)$$

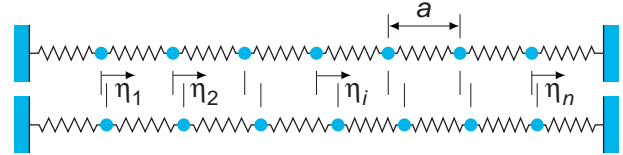
missä  $s = 1, \dots, n$ .

Normaalikoordinaattien merkitys tulee paremmin ymmärrettyä vasta kvanttimekaniikassa. On kätevintä (mutta ei välttämätöntä) ensin saattaa Lagrangen funktio normaalikoordinaateilla yksinkertaiseen muotoon (28), ja sitten vasta siirtyä kvanttimekaaniseen käsittelyyn, missä liikeyhtälö ja sen ratkaisu ovat monimutkaisemmat kuin yllä.

## 3. Hyvin monen vapausasteen värähtelyt (FW)

Edellä kerrattu pienten värähtelyjen teoria toimii periaatteessa mille tahansa äärelliselle määrälle vapausasteita  $n$ . Suurella  $n$  kuitenkin ominaisarvojen ja ominaisvektorien ratkaisu muuttuu yleisessä tapauksessa erittäin hankalaksi. Seuraavassa tarkastellaan muutamaa erikoistapausta, joissa ratkaisu onnistuu myös rajalla  $n \rightarrow \infty$ .

1)  $n$  massapistettä on kytketty toisiinsa ketjuksi massattomilla jousilla. Kaikki massapistet ovat rajoitettu liikkumaan vain  $x$ -akselilla. Ketjun päissä on kiinteät pisteet joiden etäisyys on  $\ell$ .

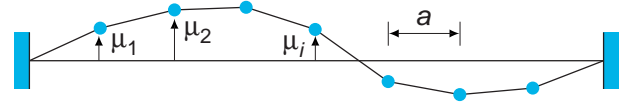


Tämän Lagrangen funktio on

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^n \dot{\eta}_i^2 - \frac{1}{2} k \sum_{i=0}^n (\eta_{i+1} - \eta_i)^2. \quad (31)$$

Tässä on oletettu että kaikki massat ja jouset ovat identtisiä, ja että jouset ovat jännittymättömiä tasapainotilassa, missä kaikki massapistet ovat tasavälein. Reunaehdot otetaan huomioon määrittelemällä  $\eta_0 \equiv \eta_{n+1} \equiv 0$ .

2)  $n$  massapistettä liikkuu poikittaissuunnassa jännitettyssä painottomassa langassa.



Tämän Lagrangen funktion neliöllinen osuus on

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^n \dot{\mu}_i^2 - \frac{\tau}{2a} \sum_{i=0}^n (\mu_{i+1} - \mu_i)^2. \quad (32)$$

Tässä  $\tau$  on langassa tasapainossa vaikuttava jännitysvoima,  $\tau = k(a - a_0)$ , ja  $a_0$  on jännittämättömän jousen pituus. Kaavan (32) todistus harjoitustehtävänä. Kuten edellä, reunaehdot otetaan huomioon määrittelemällä  $\mu_0 \equiv \mu_{n+1} \equiv 0$ .

Huomataan että poikittainen ja pitkittäinen tapaus ovat täysin samaa muotoa, ja ne saadaan toisistaan vaihtamalla parametrit

$$k \leftrightarrow \tau/a. \quad (33)$$

### 3.1 Ominaisvärähtelyt

Yleisen teorian mukaan ominaisvärähtelytaajuuudet saadaan laskemalla determinantti  $\det(\mathbf{v} - \omega^2 \mathbf{A})$  (18) ja etsimällä sen nollakohdat (katso mm. Fetter-Walecka). Tässä on kuitenkin helpompi edetä seuraavalla tavalla.

Kirjoitetaan ensin Lagrangen liikeyhtälö (3) poikittaisille värähtelyille (32):

$$m\ddot{\mu}_j - \frac{\tau}{a}(\mu_{j+1} - \mu_j) + \frac{\tau}{a}(\mu_j - \mu_{j-1}) = 0 \quad (34)$$

eli

$$m\ddot{\mu}_j + \frac{2\tau}{a}\mu_j - \frac{\tau}{a}(\mu_{j+1} + \mu_{j-1}) = 0 \quad (35)$$

Otetaan indeksin  $j$  sijasta käyttöön  $x$  koordinaatti:

$$x_j = ja, \quad (36)$$

$$\mu_j = \mu(x_j). \quad (37)$$

Etsitään ratkaisua muodossa

$$\mu(x_j, t) = A \exp[i(kx_j - \omega t)]. \quad (38)$$

Sijoittamalla liikeyhtälöön (35) saadaan

$$-m\omega^2 + \frac{2\tau}{a} - \frac{\tau}{a}[\exp(ika) + \exp(-ika)] = 0. \quad (39)$$

Tämän voi kirjoittaa

$$\omega^2 = \frac{2\tau}{am}(1 - \cos ka) = \frac{4\tau}{am} \sin^2 \frac{ka}{2}. \quad (40)$$

Tällaista riippuvuutta  $\omega(k)$  kutsutaan *dispersiorelaatioksi*.

Dispersiorelaatiossa (40) parametri  $k$  on toistaiseksi mielivaltainen. Reunaehdot kuitenkin rajoittavat sitä. Tutkitaan ensin alkuperäisestä poiketen *periodisia reunaehtoja*, joissa oletetaan

$$\mu(x_j) = \mu(x_{n+j}) = \mu(x_j + na). \quad (41)$$

Sijoittamalla yritteeseen (38) saadaan ehto

$$\exp(ikna) = 1. \quad (42)$$

Tästä seuraa

$$k = \frac{2\pi s}{na}, \quad (43)$$

missä  $s$  on kokonaisluku. Ominaisratkaisujen määrän täytyy olla täsmälleen  $n$ . Näin ollen kaikki kokonaisluvut eivät voi johtaa eri ratkaisuihin. Jos  $s \rightarrow s + n$ , niin  $ka \rightarrow ka + 2\pi$ , jolloin (38) säilyy muuttumattomana. Riittää siis  $s$ :lle valita mielivaltaiset  $n$  kappaletta peräkkäisiä kokonaislukuja ( $s = s_0, s_0 + 1, \dots, s_0 + n - 1$ ).

Palataan kiinteisiin reunaehtoihin  $\mu(x_0) = \mu(x_{n+1}) = 0$ . Nämä voidaan toteuttaa kun huomataan että ominaisratkaisut (38) ovat kahdesti degeneroituneet: arvoilla  $k$  ja  $-k$  saadaan sama  $\omega^2$  (40). Voidaan siis muodostaa uudet ominaisratkaisut, jotka ovat näiden lineaarikombinaatiota:

$$\mu(x_j, t) = A \exp(ikx_j - i\omega t) + B \exp(-ikx_j - i\omega t) \quad (44)$$

Vasemman reunan (valitaan  $x_0 = 0$ ) ehto  $\mu(0) = 0$  voidaan toteuttaa valinnalla

$$\begin{aligned} \mu(x_j, t) &= A[\exp(ikx_j - i\omega t) - \exp(-ikx_j - i\omega t)] \\ &= 2iA \sin(kx_j) \exp(-i\omega t) \end{aligned} \quad (45)$$

Oikean reunan ehto  $\mu((n+1)a) = 0$  vaatii nyt  $\sin k(n+1)a = 0$ , mistä saadaan

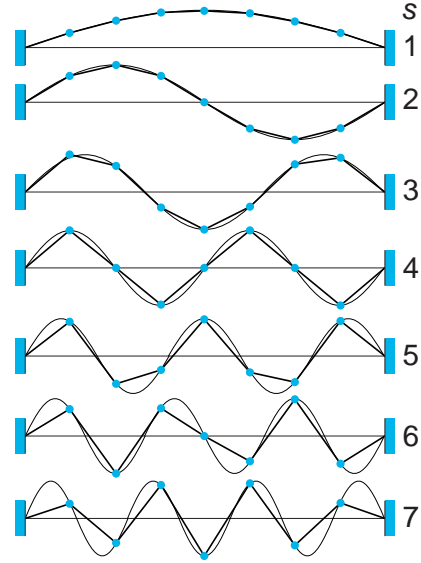
$$k = \frac{\pi s}{(n+1)a}, \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (46)$$

Tämä jonkin verran poikkeava periodisten reunaehtojen vastaavasta tuloksesta (43).

Kirjoitetaan saatu ominaisratkaisu vielä muotoon

$$\mu(x_j, t) = 2iA_s \exp(-i\omega t) \sin \frac{\pi s x_j}{\ell}, \quad (47)$$

missä  $\ell = (n+1)a$  on välin pituus. Nähdään että paikan suhteen ratkaisu on siniaalto jossa on  $s$  puoliaallonpituutta, mutta laskettuna vain diskreeteissä pisteissä  $x_j$ .



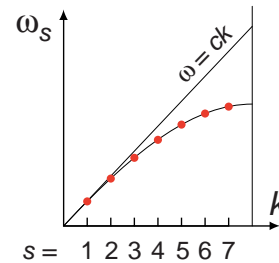
Määritellään nopeus

$$c = \sqrt{\frac{\tau a}{m}}. \quad (48)$$

Dispersiorelaatio (40) voidaan nyt kirjoittaa muotoon

$$\omega = \frac{2c}{a} \sin \frac{ka}{2}. \quad (49)$$

Koska aaltoluvulla  $k$  on vain diskreettejä arvoja, niin on myös kulmataajuudella  $\omega$ .



Pienillä aaltoluvuilla (suurilla aallonpituuksilla  $\lambda = 2\pi/k$ ) dispersiorelaatio on lineaarinen:

$$\omega = ck \quad (k \rightarrow 0). \quad (50)$$

Tällä rajalla ei massojen diskreettisyydellä ole olennaista merkitystä, vaan massan voisi ajatella jatkuvasti jakautuneeksi.

Aaltoluvun kasvaessa massojen diskreettisyyden tulee olennaiseksi. Taaajuus jää lineaarisesta lakia (50) pienemmäksi,

läheten maksimia  $\omega_{\max} \approx 2c/a$ . Tätä vastaava aallonpituus  $\lambda_{\min} \approx 2a$ .

Edellä olevaa voidaan soveltaa kiinteiden aineiden hilavärähtelyihin. Ideaalisessa kiinteässä aineessa atomien tasapainoasemat muodostavat säännöllisen hilan. Tämän hilan värähtelyt ovat luonteeltaan samankaltaisia kuin yllä käsitellyssä yksiulotteisessa tapauksessa. Kiinteän aineen hila on kuitenkin monimutkaisempi, koska se on kolmiulotteinen, ja myös värähtelyt voivat tapahtua kolmeen riippumattomaan suuntaan. Hilassa voi myös esiintyä erityyppisiä atomeita. Joitakin tapauksia tarkastellaan lähemmin harjoitustehtävinä.

## 3.2 Jatkumoraja

Tutkitaan nyt sitä tapausta, että massapisteiden määrä  $n$  lähenee äärettömyyttä seuraavalla tavalla:

$$n \rightarrow \infty, \quad a \rightarrow 0, \quad m \rightarrow 0 \quad (51)$$

$$\ell = (n+1)a = \text{vakio} \quad (52)$$

$$\frac{m}{a} \equiv \sigma = \text{vakio}, \quad (53)$$

missä  $\sigma$  on langan massatiheys. Tällä rajalla poikkeama  $\mu_i(t)$  muuttuu kahden jatkuvan muuttujan funktioksi

$$\mu_i(t) \rightarrow u(x, t), \quad (54)$$

jolloin aikaderivaatat muuttuvat osittaisderivaatoiksi

$$\dot{\mu}_i \equiv \frac{d\mu_i}{dt} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (55)$$

Kirjoitetaan Lagrangen funktio (32)

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} \sum_{i=1}^n \dot{\mu}_i^2 - \frac{\tau}{2a} \sum_{i=0}^n (\mu_{i+1} - \mu_i)^2 \\ &= \frac{\sigma}{2} a \sum_{i=1}^n \dot{\mu}_i^2 - \frac{\tau}{2} a \sum_{i=0}^n \left( \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{a} \right)^2. \end{aligned} \quad (56)$$

Sovelletaan tähän edellisiä kaavoja sekä raja-arvoja

$$a \sum_{i=1}^n \rightarrow \int_0^\ell dx \quad (57)$$

$$\frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{a} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (58)$$

Näin saadaan

$$L = \frac{\sigma}{2} \int_0^\ell dx \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tau}{2} \int_0^\ell dx \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (59)$$

Kirjoitamme tämän vielä muotoon

$$L = \frac{1}{2} \int_0^\ell dx \left[ \sigma \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \tau \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (60)$$

Näin siksi että olisimme voineet valita massatiheyden paikasta riippuvaksi,  $\sigma(x)$ . Yleistämällä edellä olevaa johtoa nähdään helposti, että (60) on tällöin oikea muoto.

## Jatkumorajan suora johto

Lagrangen funktio (60) voidaan johtaa myös suoraan, ilman diskreettiä välivaihetta. Täydellisyyden vuoksi tehdään se tässä. Tutkitaan langan elementtiä  $dx$ . Sen massa on  $\sigma dx$  ja nopeus  $\partial u / \partial t$ . Koko kineettinen energia saadaan integroimalla massaelementtien kineettiset energiat eli

$$T = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (\sigma dx). \quad (61)$$

Kun lankaa poikkeutetaan, venyy elementti  $dx$  pituuteen  $ds = \sqrt{dx^2 + du^2}$ . Tällöin tehdään työ

$$\begin{aligned} dW &= \tau(ds - dx) = \tau \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} - 1 \right] dx \\ &\approx \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (62)$$

Koko potentiaalienergia saadaan integroimalla tehty työ:

$$V = \frac{\tau}{2} \int_0^\ell \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (63)$$

Laskemalla  $L = T - V$  saadaan sama tulos kuin edellä (60).

## 3.3 Hamiltonin periaate jatkumorajalla

Juuri johdettu jatkumorajan Lagrangen funktio (60) on eri tyyppiä kuin aikaisemmin olemme kohdanneet. Koska Lagrangen yhtälön (3) suora soveltaminen vaikuttaa epäilyttävältä, on parasta lähteä liikkeelle perustavammasta Hamiltonin periaatteesta.

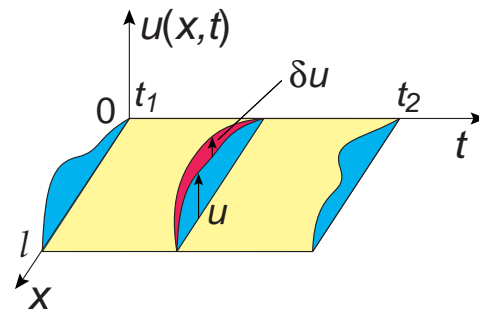
Tutkitaan yleisesti seuraavaa tyyppiä olevaa Lagrangen funktiota

$$L = \int_0^\ell dx \mathcal{L} \left( u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}; x, t \right) \quad (64)$$

Funktiota  $\mathcal{L}$  kutsutaan *Lagrangen tiheydeksi*. Venytetyn langan Lagrangen funktio (60) on tämän erikoistapaus.

Vaikutusintegraali on nyt kaksiulotteinen integraali:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^\ell dx \mathcal{L} \left( u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}; x, t \right) \quad (65)$$



Sovellettaessa Hamiltonin periaatetta tehdään kenttään  $u(x, t)$  pieni muutos

$$u(x, t) \rightarrow u(x, t) + \delta u(x, t) \quad (66)$$

Reunaehdot ovat seuraavat. Alku ja loppuhetkillä  $u(x, t)$  on kiinnitetty, joten variaatioiden täytyy hävitä:

$$\delta u(x, t_1) = \delta u(x, t_2) = 0, \quad \forall x. \quad (67)$$

Langan molemmat päät on kiinnitetty, joten myös siellä variaatioiden täytyy hävitä:

$$\delta u(0, t) = \delta u(\ell, t) = 0, \quad \forall t. \quad (68)$$

Ts. variaatiot häviävät suorakaiteen kaikilla reunoilla.

Varioidaan vaikutusintegraalia, jolloin

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^\ell dx \delta \mathcal{L} \left( u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}; x, t \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^\ell dx \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial x)} \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial t)} \delta \frac{\partial u}{\partial t} \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^\ell dx \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial x)} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial t)} \frac{\partial \delta u}{\partial t} \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^\ell dx \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial x)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial t)} \right] \delta u, \end{aligned}$$

koska sijoitustermit häviävät osittaisintegroinneissa. Nyt voi olla  $\delta S = 0$  vain silloin, kun sulkulauseke häviää kaikilla  $x$  ja  $t$ , koska  $\delta u(x, t)$  on mielivaltainen. Saadaan siis *jatkuvan systeemin Lagrangen yhtälö*:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial t)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial x)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0. \quad (69)$$

Verrataan jatkuvan systeemin Lagrangen yhtälöä

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial t)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial x)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \quad (69)$$

aikaisemmin johdettuun diskreettiin versioon

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3)$$

Diskreetti indeksi  $i$  on korvautunut jatkuvalla indeksillä  $x$ . Diskreetissä tapauksessa esiintyvä kokonaisderivaatta on siksi korvautunut osittaisderivaatalla. On kuitenkin huomattava että osittaisderivaattoja esiintyy kahdessa eri merkityksessä. Kun osittaisderivaatta kohdistuu Lagrangen tiheyteen  $\mathcal{L}$ , ovat muuttujat  $u$ ,  $\partial u / \partial x$ ,  $\partial u / \partial t$ ,  $x$  ja  $t$ . Kun taas osittaisderivaatta kohdistuu  $u$ :hun, tai *myös kun se osittaisintegroinnin seurauksena kohdistuu lausekkeisiin*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial x)} \text{ ja } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial t)}, \quad (70)$$

on muuttujiksi ymmärrettävä vain  $x$  ja  $t$ .

Sovelletaan Lagrangen yhtälöä (69) alkuperäiseen jännitetyn langan ongelmaan. Sen Lagrangen tiheys saadaan edeltä kaavasta (60):

$$\mathcal{L} = \frac{\sigma}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (71)$$

Olettaen  $\sigma$  ja  $\tau$  vakioiksi saadaan

$$\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (72)$$

Tämä on yksiulotteinen aaltoyhtälö

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (73)$$

Tässä  $c = \sqrt{\tau/\sigma}$  on sama kuin määriteltiin edellä kaavassa (48). Aaltoyhtälön perusteella se voidaan identifioida aallon nopeudeksi langassa. [Totea tämä osoittamalla että

$$u(x, t) = a(x - ct) + b(x + ct) \quad (74)$$

toteuttaa aaltoyhtälön (73) mielivaltaisilla funktiolla  $a$  ja  $b$ . Identifioi ratkaisun (74) termit vasemmalle ja oikealle nopeudella  $c$  kulkeviksi aalloiksi.]

### 3.4 Jakumorajan ratkaisu

Systemaattisuuden vuoksi konstruoidaan reunaehdot täyttävät ratkaisut myös jatkumorajalla. Vaihtelun vuoksi lähdetään suoraan reaalisesta yritteestä

$$u(x, t) = C \rho(x) \cos(\omega t + \phi) \quad (75)$$

Sijoitus aaltoyhtälöön (73) antaa

$$\frac{d^2 \rho(x)}{dx^2} + k^2 \rho(x) = 0 \quad (76)$$

missä  $k = \omega/c$ . Tämä on ominaisarvotehtävä: Samoin kuin diskreetissä tapauksessa (17), on yhtälöllä (76) reunaehdot täyttäviä ratkaisuja vain tietyillä taajuuksilla  $\omega_s = ck_s$ . Kiinteät reunaehdot vaativat

$$\rho(0) = \rho(\ell) = 0. \quad (77)$$

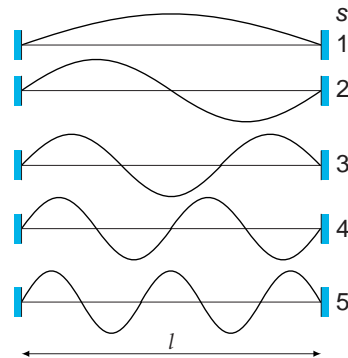
Nähdään että ratkaisut ovat

$$\rho(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell \sigma}} \sin kx, \quad (78)$$

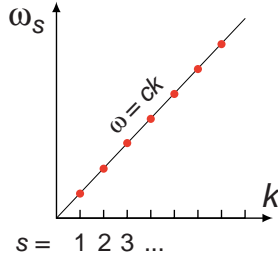
missä normalisaatioon palataan pian. Tässä aaltovektori  $k$  voi saada arvot

$$k_s = \frac{s\pi}{\ell} \quad (s = 1, 2, \dots, \infty) \quad (79)$$

Värähtelyt ovat samantyyppisiä kuin diskreeteilläkin massoilla. Erona on että värähtelymoodeja on ääretön määrä, ja dispersiorelaatio on kaikille moodeille lineaarinen,  $\omega_s = ck_s$ .







Yleisen teoreeman (19) mukaan ominaisratkaisut ovat ortogonaalisia matriisiin  $A$  mielessä. Tässä tapauksessa matriisi  $A$  on diagonaalinen,  $A(x, x') = \sigma \delta(x, x')$ . Saadaan siis

$$\int_0^\ell dx \rho^{(s)}(x) \sigma \rho^{(r)}(x) = \delta_{sr}. \quad (80)$$

eli

$$\frac{2}{\ell} \int_0^\ell dx \sin(k_s x) \sin(k_r x) = \delta_{sr}. \quad (81)$$

Edellä ominaisratkaisun (78) etetekijä valittiin siten että normalisaatiokaava (80) toteutuu myös tapauksessa  $s = u$ .

Yleinen ratkaisu voidaan nyt kirjoittaa

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{s=1}^{\infty} C^{(s)} \rho^{(s)}(x) \cos(\omega_s t + \phi_s) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\ell \sigma}} \sum_{s=1}^{\infty} \sin(k_s x) [a_s \cos(\omega_s t) + b_s \sin(\omega_s t)], \end{aligned} \quad (82)$$

missä jälkimmäisessä muodossa on kirjoitettu  $a_s = C^{(s)} \cos(\phi_s)$  ja  $b_s = -C^{(s)} \sin(\phi_s)$ . Tällaista funktion  $u$  esitystä sini- ja kosinifunktioiden avulla kutsutaan *Fourier-sarjaksi*.

Kuten yleisesti Newtonin mekaniikassa, ratkaisu kiinnittyy yksikäsitteisesti kun annetaan alkuehtoina koordinaatit ja nopeudet:  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $\dot{u}(x, 0) = g(x)$ . Sijoittamalla yleinen ratkaisu (82) saadaan alkuehdot muotoon

$$f(x) = u(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\ell \sigma}} \sum_{s=1}^{\infty} a_s \sin(k_s x) \quad (83)$$

$$g(x) = \dot{u}(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\ell \sigma}} \sum_{s=1}^{\infty} b_s \omega_s \sin(k_s x) \quad (84)$$

Integroimalla  $x$ :n yli ja käyttämällä ortonormeerausta (80) saadaan Fourier-sarjan kertoimet  $a_s$  ja  $b_s$  ratkaistua:

$$a_s = \sqrt{\frac{2\sigma}{\ell}} \int_0^\ell dx f(x) \sin(k_s x) \quad (85)$$

$$b_s = \frac{1}{\omega_s} \sqrt{\frac{2\sigma}{\ell}} \int_0^\ell dx g(x) \sin(k_s x) \quad (86)$$

### 3.5 Siirtyminen jatkumosta diskreettiin

Edellä tarkasteltiin siirtymistä diskreetistä tapauksesta jatkuvaan. Joskus on tarvis tehdä siirtyminen päinvastaiseen suuntaan, jatkuvasta diskreettiin. Usein jatkuvalla tapauksella ei ole analyttistä ratkaisua.

[Esim.  $\sigma(x)$  ei ole vakio.] Tällöin voidaan jatkumoa approksimoida diskreetillä versiolla:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\ell dx \left[ \frac{\sigma(x)}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tau(x)}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &\rightarrow a \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{2} \mu_i^2 - a \sum_{i=0}^n \frac{\tau_{i+1/2}}{2} \left( \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{a} \right)^2. \end{aligned} \quad (87)$$

Saadun diskreetin ongelman ominaistajuudet ja ominaisvektorit voidaan sitten laskea numeerisesti. Tätä varten on olemassa erityisiä tietokoneohjelmia. Yleistämällä tasapaksulle langalle saatuja tuloksia päätellään, että diskreetti versio antaa hyvän approksimaation matalimmille ominaisvärähtelyille, joiden aallonpituudet ovat suuria verrattuna diskreetointiväliin  $a$ . Korkeilla taajuuksilla, missä värähtelyjen aallonpituus pienenee kohti  $a$ :ta, ei diskreetti approksimaatio luonnollisestikaan voi toimia oikein.

Diskreetointeihin pätee muutamia sääntöjä, jotta tulos olisi mahdollisimman luotettava.

- Derivaatat kannattaa diskretoida aina käyttäen kahta lähekkäisintä pistettä, esim.  $x_{i+1}$  ja  $x_i$  (kuten yllä), ei esim.

$$\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{\mu_{i+1} - \mu_{i-1}}{2a} \quad \text{HUONO.} \quad (88)$$

- Derivaattaa kertova funktio kannattaa arvioida diskreetointipisteiden välipisteessä:  $\tau(x) \rightarrow \tau(x_i + a/2) = \tau_{i+1/2}$  (katso yllä). Jos tämä ei ole mahdollista, on käytettävä keskiarvoa

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \left( \frac{\mu_{i+1} + \mu_i}{2} \right) \left( \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{a} \right). \quad (89)$$

- Kannattaa ensin diskretoida Lagrangen (tai Hamiltonin) funktio, ja sitten johtaa liikeyhtälöt tästä käyttäen diskreetin tapauksen Lagrangen (tai Hamiltonin) yhtälöitä. Näin varmistetaan että diskreetti ongelma on matemaattisesti järkevä (joskaan ei fyysikaalinen) myös äärellisellä välinpituudella  $a$ , eikä ainoastaan rajalla  $a \rightarrow 0$ .

Jatkumoversio usein näyttää matemaattisesti elegantimalta kuin vastaava diskreetti versio. Siksi useat matemaattiset operaatiot kirjoitetaan jatkumolle. Joskus syntyy kuitenkin vaikeuksia ymmärtää mitä ne tarkoittavat. Tällöin oikea tapa on siirtyä diskreettiin tapaukseen, ja pyrkiä ymmärtämään ongelma siellä, ja se usein on helpompaa kuin yrittää käyttää pelkästään jatkumorajan käsitteitä. Jatkumoteoria pitää aina ymmärtää jonkin syvällisemmän ja monimutkaisemman teorian rajatapauksena.

## 4. Yleistä klassista kenttäteoriaa (F'W, G)

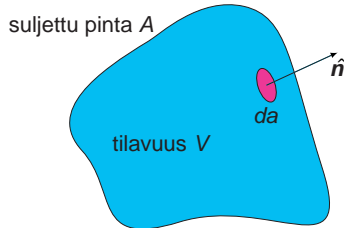
Edellä tarkastelemamme lankaesimerkki on toiminut johdatuksena yleiseen klassiseen kenttäteoriaan. Kirjoitamme nyt samat tulokset yleisemmässä muodossa. Erityisesti yleistämme käsittelyn kolmeen ulottuvuuteen, mutta emme vielä ota mukaan suhteellisuusteoreettisia (=relativistisia) ilmiöitä.

Kolmessa ulottuvuudessa voimme yleistää jatkumon Lagrangen funktion (64) muotoon

$$L = \int dV \mathcal{L} \left( u, \nabla u, \frac{\partial u}{\partial t}; \mathbf{x}, t \right) \quad (90)$$

missä tilavuusintegraali  $\int dV$  on tilavuuden  $V$  yli. Sovellamme tähän Hamiltonin periaatetta. Reunaehtoina vaadimme nyt että

$$\sum_i \hat{n}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial x_i)} \delta u = 0 \quad (91)$$



Toistamatta tässä aikaisempaa johtoamme, lienee hyväksyttävää että Lagrangen yhtälöiksi saadaan nyt

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial t)} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial x_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \quad (92)$$

Tämä on sama kuin edellä (69) lukuun ottamatta että keskitermissä  $x \rightarrow x_i$  ja summausta yli  $i$ :n.

Toinen mahdollinen yleistys on että kenttiä on useampia,  $u \rightarrow u_k$ , missä  $k = 1, 2, \dots, n$ . Koska jokaisen kentän komponentin variaatiot ovat riippumattomia, voidaan suoraan kirjoittaa tulos

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u_k / \partial t)} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u_k / \partial x_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_k} = 0 \quad (93)$$

kaikille komponenteille erikseen ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Tulee huomata, että vaikka johdimme Lagrangen funktion (90) Newtonin mekaniikkaan perustuen, voimme soveltaa sitä myös aivan muihin tarkoituksiin. Esimerkkinä tästä tarkastelemme Lagrangen tiheyttä

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2} (\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi) - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi - V \psi^* \psi. \quad (94)$$

Tässä kenttä  $\psi(\mathbf{x}, t)$  on kompleksinen, ja  $\psi^*$  on sen kompleksikonjugaatti. Kompleksiluku voidaan esittää kahden reaalityyppisen avulla esim.  $\psi = a + ib$  tai  $\psi = A \exp(i\phi)$ , joten liikeyhtälön löytämiseksi voidaan soveltaa monikomponenttikaavaa (93). Osoittautuu, että saadaan sama tulos

myös kun riippumattomiksi muuttujiksi valitaan  $\psi$  ja  $\psi^*$  (jossa tapauksessa lasku on kaikkein lyhyin). Liikeyhtälöksi saadaan (harjoitustehtävä)

$$i\hbar \dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi, \quad (95)$$

mikä on *Schrödingerin yhtälö*. Toisin sanoen, konstruoidulla sopivilla Lagrangen tiheyksillä voidaan saada aikaan liikeyhtälöitä, jotka eivät ole johdettavissa Newtonin mekaniikasta.

### 4.1 Säilymlait

Massapisteille määriteltiin *kanoninen liikemäärä* kaavalla

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (96)$$

Kenttäteoriassa määritellään *kanonisen liikemäärän tiheys* kaavalla

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial t)}. \quad (97)$$

Tämä voidaan ajatella diskreetin tapauksen raja-arvoksi

$$\pi = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{p_i}{a^d} \quad (98)$$

( $d$  on avaruuden dimensio: langalle  $d = 1$ .) Massapistemekaniikassa määritellään Hamiltonin funktio

$$\mathbb{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad (99)$$

Analogisesti määritellään nyt *Hamiltonin tiheys*

$$\mathcal{H} = \pi \frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{L}. \quad (100)$$

Hamiltonin funktio voidaan sitten Lagrangen funktion tapaan määrittellä integraalina

$$\mathbb{H} = \int dV \mathcal{H}. \quad (101)$$

Seuraavassa tarkastellaan Hamiltonin tiheyttä funktiona  $\mathcal{H}(\mathbf{x}, t)$ . Tätä muuttujavalintaa korostetaan merkitsemällä osittaisderivaattaa  $t$ :n suhteen

$$\left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}}. \quad (102)$$

Lasketaan tämä lähtien määritelmästä (100)

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} &= \left( \frac{\partial \pi}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} \frac{\partial u}{\partial t} + \pi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial x_i)} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial t)} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right]. \end{aligned}$$

Tässä toinen ja viides termi kumoavat toisensa. [Tähän juuri pyrittiin Legendren muunnoksella  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{H}$  (100).] Saadaan siis

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} &= \left( \frac{\partial \pi}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \\ &\quad - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial x_i)} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Sijoitetaan  $\pi$ :n määritelmä (97) ja käytetään Lagrangen yhtälöä (92), jolloin saadaan

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} = \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial x_i)} \right] \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial x_i)} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Ensimmäinen ja kolmas termi kumoavat toisensa, ja yhdistämällä toinen ja neljäs saadaan

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial x_i)} \frac{\partial u}{\partial t} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Määritellään vektori

$$S_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial x_i)} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (103)$$

Tätä käyttäen voidaan edellinen tulos kirjoittaa

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} + \nabla \cdot \mathbf{S} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (104)$$

Oletetaan nyt että  $\mathcal{L}$  ei riipu eksplisiittisesti ajasta ( $\partial \mathcal{L}/\partial t = 0$ ). Tällöin saadaan edellinen yhtälö muotoon

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0. \quad (105)$$

Tämä on samaa muotoa kuin jatkuvuusyhtälö: tiheyden muutos ajassa voidaan ilmaista virran  $\mathbf{S}$  divergenssin avulla. Useimmissa sovellutuksissa Hamiltonin tiheys on sama kuin energiatiheys, joten voidaan puhua energiatiheydestä  $\mathcal{H}$  ja energiavirrantiheydestä  $\mathbf{S}$ . Kaavaa (105) on siten *energian säilymlaki*. Laki (105) on *lokaali* koska se koskee energiatiheyttä yhden pisteen ympäristössä.

Tarkastellaan energiaa tietyssä annetussa tilavuudessa  $V$ . Tätä vastaava Hamiltonin funktio

$$\mathbb{H} = \int_V dV \mathcal{H}(\mathbf{x}, t). \quad (106)$$

Pitäen tilavuutta muuttumattomana saadaan aikaderivaatalle

$$\frac{d\mathbb{H}}{dt} = \int_V dV \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}. \quad (107)$$

Käyttäen lokaalia säilymlakia (105) ja vektorirelaatioita saadaan

$$\frac{d\mathbb{H}}{dt} = - \int_V dV \nabla \cdot \mathbf{S} = - \int_A d\mathbf{a} \cdot \mathbf{S}, \quad (108)$$

Tämä on energian säilymisen lain integraalimuoto. Jos virtaus  $\mathbf{S}$  häviää reunalla  $A$  (reuna mahdollisesti hyvin kaukana, tai reunaehdot takaavat tämän), saadaan kokonaise-energian säilymlaki

$$\frac{d\mathbb{H}}{dt} = 0. \quad (109)$$

Mietiskelyn aihe: massapisteille saatiin vain kokonaise-energian säilyminen (muistele analyyttisen mekaniikan kurssia). Miksi nyt saadaan myös lokaalinen säilymlaki?

## Muita säilymlakeja

Edellä ollut Hamiltonin funktion säilymisen yhteydessä käytetty kaava (104) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial t)} \frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{L} \right] + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial x_i)} \frac{\partial u}{\partial t} \right] \\ &= - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (110)$$

[Huom. tässä ja kaavassa (111) hakasulkulausekkeet on taas ymmärrettävä vain  $\mathbf{x}$ :n ja  $t$ :n funktioiksi.] Lagrangen yhtälössä (92) aika ja paikka esiintyvät hyvin symmetrisesti. Kun edellisen kaavan johdossa sopivasti vaihdetaan paikka ja aika keskenään, saadaan kaava

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial t)} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] \\ &+ \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial x_i)} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \delta_{ij} \mathcal{L} \right] = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (111)$$

jonka voi osoittaa todeksi suoralla laskulla. Jos  $\mathcal{L}$  ei eksplisiittisesti riipu  $x_j$ :stä ( $\partial \mathcal{L}/\partial x_j = 0$ ), saadaan tästä tiheyden

$$\mathcal{P}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial t)} \frac{\partial u}{\partial x_j} \quad (112)$$

lokaali säilymlaki. Kaavan (111) jälkimmäinen hakasulkulauseke voidaan identifioida vastaavaksi virran tiheydeksi.

Lagrangen yhtälö (92) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{\partial}{\partial t} \pi + \nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \quad (113)$$

missä kanoninen liikemäärä on määritelty kaavalla (97) ja

$$G_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial x_i)} \quad (114)$$

Jos Lagrangen tiheys ei riipu itse kentän  $u$  arvosta ( $\partial \mathcal{L}/\partial u = 0$ ), saadaan tästä lokaalinen säilymlaki kanoniselle liikemäärälle.  $\mathbf{G}$  identifioidaan tällöin kanonisen liikemäärän virran tiheydeksi.

Integraalimuotoinen säilymlaki saadaan molemmissa yllä olevissa tapauksissa samoin kuin energian tapauksessa.

Jos kentällä on useampia komponentteja  $u_k$ , saadaan joissain tapauksissa vielä useampia säilymlakeja, joita ei käsitellä tässä.

## 5. Suhteellisuusteoriaa

Kerrataan erikosen suhteellisuusteorian perusteet. Tarkempi käsittely on esitetty mm. Landau&Lifshitz, The classical theory of fields.

Erikoinen suhteellisuusteoria lähtee oletuksesta, että valon nopeus on sama kaikille havaitsijoille, riippumatta niiden suhteellisesta nopeudesta.

### Lorentz-muunnos

Olkoon  $\mathbf{r}_1$  jokin paikka-avaruuden piste ja  $t_1$  jokin aika. Näiden muodostamaa kokonaisuutta  $(x_1, y_1, z_1$  ja  $t_1)$  kutsutaan *tapahtumaksi*. Olkoon kaksi paikka-avaruuden pistettä  $\mathbf{r}_1$  ja  $\mathbf{r}_2$  niin, että valo kulkee pisteestä toiseen kun aika kuluu hetkestä  $t_1$  hetkeen  $t_2$ . Tällöin täytyy olla voimassa

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2 = 0 \quad (115)$$

missä koordinaatit on mitattu jossain inertiaalikoordinaatistossa  $K$ , ja  $c$  on valon nopeus. Jossain toisessa inertiaalikoordinaatistossa  $K'$  tapahtumalle 1 mitataan koordinaatit  $x'_1, y'_1, z'_1$  ja  $t'_1$  ja tapahtumalle 2 koordinaatit  $x'_2, y'_2, z'_2$  ja  $t'_2$ . Tällöin

$$(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2 - c^2(t'_1 - t'_2)^2 = 0 \quad (116)$$

missä  $c$  on sama kuin kaavassa (115). Yleistämällä tätä, voidaan kahteen mielivaltaiseen avaruusajan tapahtumaan liittää suure

$$s^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 \quad (117)$$

Tätä voidaan kutsua tapahtumien *välimatkaksi*.

Olkoon kahden tapahtuman välimatkat  $s^2$  ja  $s'^2$  kun ne on mitattu koordinaatistoissa  $K$  ja  $K'$ . Edellisestä seuraa, että jos  $s^2 = 0$ , niin silloin myös  $s'^2 = 0$ . Oletetaan nyt avaruus homogeeniseksi. Esim. jos tapahtumien etäisyys koordinaatistossa  $K$  muuttuu kaksinkertaiseksi, muuttuu se kaksinkertaiseksi myös koordinaatistossa  $K'$ . Tästä seuraa että välimatkojen täytyy olla verrannollisia toisiinsa:

$$s^2 = a(V)s'^2. \quad (118)$$

Tässä verrannollisuuskertoimen  $a(V)$  voi riippua ainoastaan koordinaatistojen suhteellisen nopeuden itseisarvosta.

Perustellaan seuraavaksi että  $a(V) \equiv 1$ . Olkoon kolme inertiaalikoordinaatistoa  $K, K_1$  ja  $K_2$ , ja olkoon kahden jälkimmäisen nopeudet  $V_1$  ja  $V_2$  nähtynä  $K$ :sta. Tästä seuraa

$$s^2 = a(V_1)s_1^2, \quad s^2 = a(V_2)s_2^2. \quad (119)$$

Myöskin

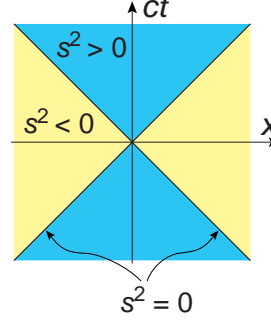
$$s_1^2 = a(V_{12})s_2^2, \quad (120)$$

missä  $V_{12}$  on  $K_2$ :n nopeus nähtynä  $K_1$ :stä. Näistä saadaan

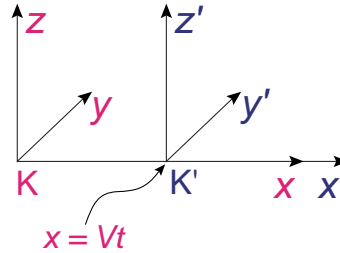
$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}). \quad (121)$$

Mutta  $V_{12}$ :n täytyy riippua nopeuksien  $V_1$  ja  $V_2$  välisestä kulmasta. Koska kaavan (121) vasen puoli on tästä riippumaton, täytyy  $a$ :n olla  $V$ :sta riippumaton vakio. Samasta kaavasta nähdään että tämän vakion täytyy olla 1, siis  $a(V) \equiv 1$ .

Välimatka  $s^2$  jakaa tapahtumaparit kolmeen eri luokkaan: ajan luonteisiin joissa  $s^2 > 0$ , valon luonteisiin joissa  $s^2 = 0$  ja paikan luonteisiin joissa  $s^2 < 0$ . Oheisessa kuvassa on merkitty eri  $x$ - $ct$ -tason tapahtumien luonne suhteessa origoon ( $x = 0, t = 0$ ).



Pyritään seuraavaksi määrittämään miten tapahtuman koordinaatit muuttuvat kun siirrytään inertiaalikoordinaatistosta toiseen. Oletetaan että koordinaatisto  $K'$  liikkuu  $K$ :hon nähden niiden yhteistä  $x$ -akselia pitkin nopeudella  $V$ . Oletetaan että myös  $y$  ja  $z$  akselit ovat samansuuntaisia näissä koordinaatistoissa, ja että koordinaatistojen origot yhtyvät ajanhetkellä 0.



Yksinkertaisin mahdollinen muunnos koordinaatistojen välillä on *Galilein muunnos*

$$x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \quad (122)$$

Tämä muunnos ei kuitenkaan toteuta vaatimusta, että valon nopeus olisi sama kaikille havaitsijoille, koska  $s^2$  ei ole invariantti.

On ilmeistä että niin kauan kuin  $t = t'$  ei  $s^2$ :n invarianttisuutta voida saada aikaan. Galilein muunnoksen minimaalinen yleistys olisi lineaarinen riippuvuus

$$x = a_1x' + a_2ct', \quad y = y', \quad z = z', \quad ct = a_3x' + a_4ct'. \quad (123)$$

Tämä voidaan tulkita jonkinlaiseksi kierroksi tasossa  $(x, ct)$ . Tässä kierrossa täytyy jäädä invariantiksi välimatka  $s^2 = c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$ . Merkkiä lukuun ottamatta tämä on sama ehto kuin tavallisten kiertojen suhteen eli että pisteiden etäisyydet säilyvät. Tason tavallisista rotaatioista tiedetään, että kiertoon liittyy vain yksi vapaa parametri, kiertokulma. Vastaavasti kierrossa (123) on vain yksi vapaa parametri. Merkkierojen takia tavallisten sinin

ja kosinin sijasta kannattaa käyttää hyperbolisia funktioita:

$$x = x' \cosh \psi + ct' \sinh \psi, \quad ct = x' \sinh \psi + ct' \cosh \psi. \quad (124)$$

Laskemalla voi todeta että  $s^2$  todellakin on invariantti tässä muunnoksessa.

Pyritään identifioimaan ”kiertokulma”  $\psi$ . Tarkastellaan koordinaatistossa  $K$  koordinaatiston  $K'$  origoa, eli  $x' = 0$ . Tälle saadaan kaavasta (124)

$$x = ct' \sinh \psi, \quad ct = ct' \cosh \psi. \quad (125)$$

Jakamalla saadaan

$$\frac{x}{ct} = \tanh \psi \quad (126)$$

Tässä  $x/t$  on koordinaatiston  $K'$  nopeus suhteessa  $K$ :hon, siis

$$\tanh \psi = \frac{V}{c}. \quad (127)$$

Tästä saadaan

$$\sinh \psi = \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \cosh \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (128)$$

Koko muunnokseksi saadaan siten

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (129)$$

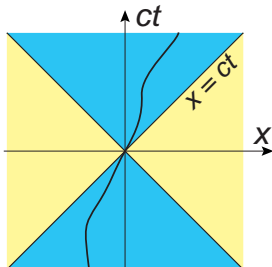
Tämä on *Lorentz muunnos*.

Tarkastellaan muutamia Lorentz-muunnoksen seurauksia.

Koordinaatistojen suhteellinen nopeus ei riipu siitä kummasta koordinaatistosta katsotaan (etumerkkiä tietysti lukuun ottamatta). Todistus harjoituksena.

Jos kaksi tapahtumaa ovat ajanluonteisia, voidaan aina löytää koordinaatisto, jossa ne ovat samanaikaiset. Jos kaksi tapahtumaa ovat paikanluonteisia, voidaan aina löytää koordinaatisto, jossa ne ovat samanaikaiset. Todistus harjoituksena.

Jotta kausaalisuus toteutuisi kaikissa koordinaatistoissa, ei hiukkasen nopeus edellisen perusteella voi ylittää valon nopeutta. Hiukkasen rata on siis aina ajanluonteinen.



Neliavaruuden matematiikkaa

Käydään tässä läpi merkintöjä ja matematiikkaa, joita tarvitaan myöhemmin fysikaalisen teorian kehittämisessä.

Kukin tapahtuma vastaa jotain neliulotteisen avaruuden vektoria. Aletaan merkitä tapahtuman koordinaatteja seuraavasti

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \quad (130)$$

Tässä merkinnässä vektorin ”pituus”

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \quad (131)$$

Mitä tahansa neljän komponentin  $A^0, A^1, A^2$  ja  $A^3$  joukkoa kutsutaan *nelivektoriksi* jos ne muuttuvat koordinaatistomuunnoksessa samoin kuin koordinaattinelivektori  $x^i$ . Lorentz-muunnoksessa niiden siis tulee muuttua seuraavasti:

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{V}{c}A'^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^1 = \frac{A'^1 + \frac{V}{c}A'^0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3. \quad (132)$$

Otetaan lisäksi käyttöön merkintä

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3. \quad (133)$$

Nelivektorin komponentteja, mitä merkitään yläindeksillä ( $A^i$ ), kutsutaan *kontravarianteiksi* komponenteiksi. Niitä komponentteja joita merkitään alaindeksillä ( $A_i$ ) kutsutaan *kovarianteiksi* komponenteiksi. Usein kirjoitetaan  $A^i = (A^0, \mathbf{A})$ , jolloin siis  $A_i = (A^0, -\mathbf{A})$ . Nelivektorin pituudelle voidaan näin kirjoittaa

$$A_0 A^0 + A_1 A^1 + A_2 A^2 + A_3 A^3 = \sum_{i=0}^3 A_i A^i, \quad (134)$$

missä summamerkki usein jätetään merkitsemättä. Määritellään kahden nelivektorin skalaaritulo

$$A_i B^i = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3. \quad (135)$$

Selvästi  $A_i B^i = A^i B_i$ . Tämä tulo muodostaa *neliskalaarin*, millä tarkoitetaan lukua joka ei muutu koordinaattimuunnoksissa.

Huom. Kun on kyse vain kolmivektoreita sisältävistä lausekkeista, voimme (varovaisuutta noudattaen) kirjoittaa komponentti-indeksin ylös tai alas *ilman* merkinvaihtoa:  $x^\alpha = x_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ).

Määritellään yleisemmin *nelitensori*. Neliskalaari on nollannen kertaluvun nelitensori ja nelivektori on ensimmäisen kertaluvun nelitensori. Toisen kertaluvun nelitensorilla tarkoitetaan 16 komponenttista suuretta  $A^{ij}$ , joka muuntuu koordinaattimuunnoksissa kuten kahden nelivektorin komponenttien tulot  $B^i C^j$ . Näille määritellään ko- ja kontravariantit kunkin indeksin suhteen erikseen samalla tavalla kuin nelivektoreille. Esim.

$$(A^{ik}) \equiv \begin{pmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{03} \\ A^{10} & A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{20} & A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{30} & A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} A^0_0 & -A^0_1 & -A^0_2 & -A^0_3 \\ A^1_0 & -A^1_1 & -A^1_2 & -A^1_3 \\ A^2_0 & -A^2_1 & -A^2_2 & -A^2_3 \\ A^3_0 & -A^3_1 & -A^3_2 & -A^3_3 \end{pmatrix} = \dots \\
&= \begin{pmatrix} A_{00} & -A_{01} & -A_{02} & -A_{03} \\ -A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ -A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ -A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}. \quad (136)
\end{aligned}$$

Kun ylä- ja alaindeksinä on sama kirjain ymmärretään se aina summattuna. Esimerkiksi

$$A_{ki}B^i = A_{k0}B^0 + A_{k1}B^1 + A_{k2}B^2 + A_{k3}B^3, \quad (137)$$

mistä tuloksena on nelivektori, tai

$$A^i_i = A^0_0 + A^1_1 + A^2_2 + A^3_3, \quad (138)$$

mistä tulee neliskalaari.

Tensoria kutsutaan symmetriseksi jos  $A^{ik} = A^{ki}$  ja antisymmetriseksi jos  $A^{ik} = -A^{ki}$ . Antisymmetriselle tensorille kaikki diagonaalelementit häviävät:  $A^{00} = A^{11} = A^{22} = A^{33} = 0$ . Symmetriselle tensorille myös  $A^i_k = A_k^i$ , jota voidaan siis merkitä myös  $A^i_k$ :lla.

Määritellään yksikkötensori  $\delta^i_k$

$$(\delta^i_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (139)$$

Sen kontra- ja kovariantteja versiota merkitään  $g^{ik}$  ja  $g_{ik}$ . Näiden molempien komponentit ovat

$$(g^{ik}) = (g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (140)$$

Tätä kutsutaan myös *metriseksi tensoriksi*. Sitä voidaan käyttää muunnoksissa kontra- ja kovarianttien komponenttien välillä. Esim.

$$\begin{aligned}
g_{ik}A^k &= A_i, & g^{ik}A_k &= A^i, \\
A^iA_i &= g_{ik}A^iA^k = g^{ik}A_iA_k. \quad (141)
\end{aligned}$$

Tensorit  $\delta^i_k$ ,  $g^{ik}$  ja  $g_{ik}$  ovat erikoisia siksi, että niiden komponentit ovat riippumattomia koordinaatistosta. Sama ominaisuus on *täysin antisymmetrisellä yksikkötensorilla*,  $e^{iklm}$ , joka on neljännen kertaluvun tensori. Sille määritellään  $e^{0123} = +1$ , ja merkki vaihtuu aina kun pareittain vaihdetaan indeksiin paikkaa. Kaikki muut elementit (joissa olisi siis vähintään kaksi samaa indeksiä) ovat nollia.

Tässä yhteydessä on hyvä käydä läpi myös tavallisen kolmiulotteisen avaruuden tensoreita. Siellä määritellään täysin antisymmetrisen yksikkötensori  $e_{\alpha\beta\gamma}$  vastaavasti kuin yllä.  $e_{\alpha\beta\gamma}$ :llä on  $6 = 3!$  nollasta poikkeavaa komponenttia jotka ovat

$$e_{xyz} = e_{zyx} = e_{yxz} = 1, \quad e_{xzy} = e_{yxz} = e_{zxy} = -1. \quad (142)$$

Sen avulla voidaan vektorien ristitulo  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$  kirjoittaa  $C_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma}A_\beta B_\gamma$ .

Tutkitaan antisymmetristä nelitensoria  $A^{ik}$ . Sillä on 6 riippumattonta komponenttia, joten se voidaan kirjoittaa kahden 3-vektorin  $\mathbf{a}$  ja  $\mathbf{p}$  avulla

$$(A^{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (143)$$

Tässä puhtaalle paikka-avaruuden osuudelle  $A^{\alpha\beta} = -e_{\alpha\beta\gamma}a_\gamma$ , missä indeksit saavat arvot 1, 2 ja 3.

Olkoon  $\phi$  jokin skalaarifunktio  $\phi(x^0, x^1, x^2, x^3)$ . Määritellään sen neligradientti

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^i} = \left( \frac{\partial\phi}{\partial x^0}, \nabla\phi \right). \quad (144)$$

Tämän täytyy olla *kovariantti* nelivektori, sillä kokonais-differentiaalini

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^i} dx^i \quad (145)$$

täytyy olla (neli)skalaari. Siis gradientti kontravariantin koordinaatin suhteen on kovariantti nelivektori (ja päinvastoin).

Neliavaruudessa voimme määritellä erilaisia integraaleja. Esimerkiksi viivaintegraaleja olisivat

$$\begin{aligned}
a &= \int ds f, & b &= \int dx^i A_i, & c^i &= \int dx^i f, \\
d^{ik} &= \int dx^i A^k. \quad (146)
\end{aligned}$$

Kaksi ja kolmiulotteiset integraalit voidaan myös määritellä, jos tarvetta tulee. Neliulotteinen integraali funktiosta  $f$  on

$$\int dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 f \equiv \int d\Omega f. \quad (147)$$

Tässä neliavaruuden tilavuuselementti  $d\Omega$  on riippumaton koordinaatistosta. Todistus:

Matematiikan kursseissa (toivottavasti) osoitetaan että muuttujanvaihdossa

$$dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3 = J dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (148)$$

missä  $J$  on Jacobin determinanti:

$$J \equiv \frac{\partial(x'^0, \dots, x'^3)}{\partial(x^0, \dots, x^3)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} & \dots & \frac{\partial x'^3}{\partial x^0} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x'^0}{\partial x^3} & \dots & \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} \end{vmatrix}. \quad (149)$$

On helppo näyttää että Lorentz-muunnokselle (132)  $J = 1$ . (Sanallisesti tätä voisi luonnehtia siten, että *Lorentzlyhenemisen* ja *aikadilataation* vaikutukset tilavuuselementin kokoon kumoavat toisensa.)

Nyt palaamme takaisin fysikaalisen teorian kehittelyyn.



## Nelinopeus

Suhteellisuusteorian perusajatus on että kaikki inertiaalikoordinaatistot ovat samanarvoisia. Sen takia luonnonlakien pitää olla koordinaatistosta riippumattomia. Fysikaalinen teoria on tässä tapauksessa hyvä muotoilla käyttäen ainoastaan nelitensoreita. Tällä saavutetaan se etu, että teoria on automaattisesti riippumaton koordinaatistosta. Eri suureiden arvot muissa kuin juuri tutkitussa koordinaatistossa on tällöin välittömästi saatavissa, sillä nelitensoreiden komponenttien muuttuminen koordinaatistosta toiseen on kiinnitetty yllä. Siirtyminen komponenteista nelitensoreihin on analogista sen kanssa kun siirrytään avaruuden koordinaateista  $(x, y, z)$  vektorin  $\mathbf{r}$  käyttöön.

Pyrkiäksemme noudattamaan yllä olevaa periaatetta, meidän olisi määriteltävä hiukkasen nopeutta kuvaava nelitensori. Vakiotekijää lukuun ottamatta tässä ei ole muuta vaihtoehtoa kuin määritellä *nelinopeus* derivaataksi

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}. \quad (150)$$

Tässä pituuden differentiaali

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} \\ &= dt \sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \end{aligned}$$

missä  $v$  on hiukkasen tavallinen (kolmiulotteinen) nopeus. Saadaan esimerkiksi

$$u^1 = \frac{dx^1}{ds} = \frac{dx}{c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (151)$$

joten koko nelinopeus voidaan kirjoittaa

$$u^i = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (152)$$

Koska  $dx^i dx_i = ds^2$  saadaan

$$u^i u_i = 1, \quad (153)$$

siis ainoastaan nelinopeuden 3-vektoriosa (komponentit 1-3) sisältää riippumatonta informaatiota.

## Vaikutusintegraali

Pyritään muodostamaan vapaan hiukkasen liikeyhtälöt. Liikeradaksi täytyy tietysti tulla suoraviivainen liike, mutta kysymys onkin miten tämä voidaan lausua suhteellisuusteorian periaatteita noudattaen.

Käytetään Hamiltonin periaatetta. Siinä liike tapahtumasta  $a$  tapahtumaan  $b$  määräytyy ehdosta että vaikutusfunktionaalilla on minimi, eli sen variaatio häviää:

$$\delta S = 0. \quad (154)$$

Vaikutuksen  $S$  täytyy olla neliskalaari. Se on erittäin rajoittava ehto. Miettimällä eri vaihtoehtoja voi todeta, että

itse asiassa ainoa vaihtoehto, ja samalla erittäin yksinkertainen sellainen, on valita

$$S = -\alpha \int_a^b ds, \quad (155)$$

missä  $\alpha$  on jokin vakio. Koska  $ds$  on neliskalaari, on myös  $S$  (155) neliskalaari. [Huom. Nelinopeudesta  $u^i$  voi konstruoida skalaarin  $u^i u_i$ , mutta tämä on vakio (153), joten se on hyödytön  $S$ :ää muodostettaessa.]

Jotta voisimme ymmärtää  $S$ :n (155) kirjoitetaan se aikaintegraalina, kuten aiemmin on totuttu [kaava (1)]:

$$S = -\alpha \int_a^b ds = -\alpha c \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (156)$$

Tästä voimme identifioida Lagrangen funktion

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (157)$$

Oletetaan nyt että hiukkasen nopeus  $v \ll c$ , jolloin

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}. \quad (158)$$

Ensimmäinen termi on epäolennainen vakio. Toinen termi on sama kuin aiemmin tuttu vapaan hiukkasen  $L = \frac{1}{2}mv^2$ , kun identifioidaan  $\alpha = mc$ . Olemme siis erittäin tyytyväisiä, ja kirjoitamme lopullisessa muodossaan vapaan hiukkasen vaikutusintegraalin

$$S = -mc \int_a^b ds \quad (159)$$

ja Lagrangen funktion

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (160)$$

## Energia ja liikemäärä

Liikemäärän lauseke määräytyy tunnetusti (96) Lagrangen funktiosta. Relativistiselle hiukkaselle  $L$  (160) antaa

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (161)$$

Tämä yhtyy tuttuun lausekkeeseen  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  epärelativistisella rajalla  $v \ll c$ . Liikemäärä  $p$  divergoi kun  $v \rightarrow c$ .

Energia saadaan laskemalla Hamiltonin funktio (99): (varataan symbolit  $E$  ja  $H$  vastedes sähkö ja magneettikentille)

$$\mathbb{E} = \mathbb{H} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} - L, \quad (162)$$

mistä saadaan

$$\mathbb{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (163)$$

Levossa olevalle hiukkaselle ( $v = 0$ ) saadaan

$$\mathbb{E} = mc^2, \quad (164)$$

mikä on *lepoenergia*. Epärelativistisella rajalla

$$\mathbb{E} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2, \quad (165)$$

missä toinen termi on tuttu epärelativistinen kineettinen energia.

Pyritään lausumaan energia  $\mathbb{E} = \mathbb{H}$  liikemäärän  $\mathbf{p}$  funktiona. Edellisistä kaavoista saadaan relaatio

$$\frac{\mathbb{E}^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2. \quad (166)$$

tai

$$\mathbb{E} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \quad (167)$$

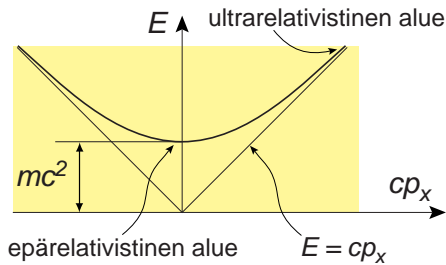
Pienille nopeuksille ( $v \ll c$ ) saadaan

$$\mathbb{E} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m}. \quad (168)$$

*Ultrarelativistisella rajalla* ( $p \gg mc$ ) saadaan

$$\mathbb{E} \approx cp. \quad (169)$$

mikä pätee eksaktisti jos  $m = 0$ . Kuva piirretty olettaen  $\mathbf{p}$   $x$ -akselin suuntaiseksi ( $p_y = p_z = 0$ ).



Kaavoista (161) ja (163) saadaan myös relaatio

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbb{E}}{c^2}\mathbf{v}. \quad (170)$$

Määritellään nyt neliliikemäärä  $p^i$ :

$$p^i = mcu^i, \quad (171)$$

eli vakio kertaan nelinopeus. Vertailemalla edellä johdettuja kaavoja havaitaan että  $p^i$ :n paikkakomponentit ovat samat kuin liikemäärän ja aikakomponentti on vakiotekijää vaille energia:

$$p^i = \left( \frac{\mathbb{E}}{c}, \mathbf{p} \right). \quad (172)$$

Ymmärretään siis että energia ja liikemäärä ovat koordinaatistosta riippuvia suureita, mutta yhdessä ne muodostavat nelivektorin, joka on koordinaatistosta riippumaton. Yleiset nelivektorien muunnoskaavat (132) antavat energian ja liikemäärän mielivaltaisessa koordinaatistossa, jos ne molemmat ovat tiedossa yhdessä koordinaatistossa.

On huomattava, että energian identifointi neliliikemäärän nollanneksi komponentiksi ( $\mathbb{E} = cp^0$ ) edellyttää, että lepoenergia (164) on laskettu mukaan energiaan. Siis suhteellisuusteoriassa energian nollataso on hyvin määritelty, kun taas epärelativistisessa mekaniikassa energiaan voitiin aina lisätä mielivaltainen vakio ilman mitään seuraamuksia.

## Säilymlait

Edellä tarkasteltiin yhtä vapaata kappaletta. Yleistys useampaan kappaleeseen on suoraviivainen: jokaiselle kappaleelle on oma termsä Lagrangen funktiossa:

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} \rightarrow -c^2 \sum_k m_k \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}_k^2}{c^2}}. \quad (173)$$

Toinen oleellinen yleistys on ottaa huomioon kappaleiden väliset vuorovaikutukset. Jatkossa tullaan erityisesti käsittelemään sähkömagneettista vuorovaikutusta, ja erityisesti konstruoidaan sen Lagrangen funktio. Kuitenkin jo ennen tätä on hyvä lausua yleisemmät energian ja liikemäärän säilymlait. Nimittäin (kuten analyttisen mekaniikan kursseissa opittiin) energian säilyminen on seurausta siitä, että Lagrangen funktio ei eksplisiittisesti riipu ajasta. Vastaavasti, liikemäärän säilyminen seuraa siitä, että Lagrangen funktio ei eksplisiittisesti riipu paikkakoordinaatista.

Suhteellisuusteoriassa energian ja liikemäärän säilymlait yhdistyvät luonnollisella tavalla:

*Hiukkasjoukon neliliikemäärä säilyy kun systeemin Lagrangen funktio on invariantti neliavaruuden siirroissa.*

Lagrangen funktion sallitaan siis riippua ainoastaan kappaleiden koordinaattien erotuksista esim.  $x_a^i - x_b^i$ ,  $x_a^i - x_c^i$  jne.



## 6. Varaukset sähkömagneettisessa kentässä

Edellä esitettyyn vapaan hiukkasen teoriaan saadaan todellista sisältöä vasta kun siihen voidaan lisätä hiukkasten välisiä vuorovaikutuksia. Tässä kurssissa keskitytään sähkömagneettiseen vuorovaikutukseen. Kehitämme hiukkasten ja sähkömagneettisen kentän klassista teoriaa kahdessa vaiheessa. Ensin tarkastelemme hiukkasia annetussa ulkoisessa kentässä, ja sen jälkeen tutustumme kentän itsensä dynamiikkaan.

### Nelipotentiali

Vapaan hiukkasen vaikutusintegraali (159) johdettiin yllä. Epärelativistisessa mekaniikassa ulkoinen kenttä otettiin mukaan lisäämällä vaikutusintegraaliin potentiaalitermi

$$S = S_0 + S_{\text{pot}}, \quad S_{\text{pot}} = - \int_{t_a}^{t_b} dt V(q_i). \quad (174)$$

Tällä kertaa suhteellisuusteoria ankarasti rajoittaa mahdollisia valintoja. Yksinkertaisin valinta muodostaa neliskalaari, jossa hiukkasen paikka kytkeytyy johonkin potentiaaliin, on skalaari potentiaali  $A$  ja

$$S_{\text{pot}} = - \int_a^b A ds. \quad (175)$$

Tämä valinta ei kuitenkaan johda sähkömagnetismin teoriaan (harjoitustehtävä).

Seuraavaksi yksinkertaisin tapaus lienee valita vuorovaikutustermiksi

$$S_{\text{pot}} = -e \int_a^b A_i dx^i = -e \int_a^b A_i u^i ds. \quad (176)$$

Tässä potentiaalina esiintyy nelivektori

$$A^i = \left( \frac{\varphi}{c}, \mathbf{A} \right) \quad (177)$$

Kutsutaan  $\varphi$ :tä ja  $\mathbf{A}$ :ta skalaari- ja vektoripotentiaaleiksi. Tässä vaiheessa  $e$  on jokin vakio, sekä  $\varphi$  ja  $\mathbf{A}$  jotain kenttiä, jotka *toistaiseksi ovat täysin tuntemattomia*. Ehkä kannattaa kuitenkin jo vihjata, että jatkossa  $e$  tullaan identifioimaan sähkövaraukseksi, ja  $\varphi$  ja  $\mathbf{A}$  sähkömagneettisen kentän potentiaaleiksi. Kirjoitetaan vielä kokonaisuudessaan tutkittava vaikutusintegraali

$$S = \int_a^b (-mcds - eA_i dx^i). \quad (178)$$

Lähdetään pyrittämään tuttua koneistoa. Kirjoitetaan nelivektorit auki

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b \left( -mcds - e \frac{\varphi}{c} cdt + e\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \right) \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \left( -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\varphi + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right) dt. \end{aligned} \quad (179)$$

Tästä voimme identifioida Lagrangen funktion

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\varphi. \quad (180)$$

Merkitään kanonista liikemäärää (96)  $\mathbf{P}$ :llä. Sille saadaan

$$\mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\mathbf{A} = \mathbf{p} + e\mathbf{A}, \quad (181)$$

missä  $\mathbf{p}$  on vapaan hiukkasen liikemäärä. Energialle saadaan

$$\mathbb{E} = \mathbb{H} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \quad (182)$$

Energian ja liikemäärän välille saadaan relaatiot [vertaa (166)]

$$\left( \frac{\mathbb{H} - e\varphi}{c} \right)^2 = m^2 c^2 + (\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2, \quad (183)$$

$$\mathbb{H} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2} + e\varphi. \quad (184)$$

Pienille nopeuksille ( $v \ll c$ ) saadaan likimäärin

$$L = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\varphi, \quad (185)$$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \mathbf{P} - e\mathbf{A}, \quad (186)$$

$$\mathbb{H} = mc^2 + \frac{1}{2m} (\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2 + e\varphi. \quad (187)$$

Nämä relaatiot ovat samat kuin johdettiin analyttisen mekaniikan kurssissa, lepoenergiaa tietysti huomioimatta. Kiinnitetään huomiota siihen että Hamiltonin funktiossa kineettinen energia itse asiassa on  $\frac{1}{2}mv^2$ , ja vektoripotentiaali esiintyy siinä vain sen takia, että  $\mathbb{H}$  kuuluu ilmaista käyttäen kanonista liikemäärää  $\mathbf{P}$ .

### Liikelyhtälöt

Hiukkasen liikelyhtälöt saadaan Lagrangen yhtälöstä (3), joka voidaan kirjoittaa

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (188)$$

Tässä on käytetty merkintää

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial f}{\partial a_x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial f}{\partial a_y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial f}{\partial a_z}, \quad (189)$$

josta  $\nabla$  on erikoistapaus

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}. \quad (190)$$

Lasketaan  $L$ :stä (180) ensin paikkaderivaatta

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = e\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - e\nabla\varphi. \quad (191)$$

Sovelletaan kaavaa

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}), \quad (192)$$

jolloin

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = e(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + e\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - e\nabla\varphi. \quad (193)$$

Liikkeyhtälöksi (188) saadaan

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) = e(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + e\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - e\nabla\varphi. \quad (194)$$

Huomataan vielä että  $\mathbf{A}$ :n kokonaisderivaatta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned} \quad (195)$$

Sijoittamalla tämä saadaan liikkeyhtälö

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e\nabla\varphi + e\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (196)$$

Oikealla puolella kaksi ensimmäistä termiä ovat riippumattomia hiukkasen nopeudesta, kun taas kolmannessa esiintyy nopeus  $\mathbf{v}$ . Kaavan yksinkertaistamiseksi tuntuu siksi järkevältä määritellä kaksi uutta kenttää:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi \quad (197)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (198)$$

Näillä liikkeyhtälö saadaan muotoon

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (199)$$

Näistä identifioidaan *sähkökenttä*  $\mathbf{E}$ , *magneettikenttä*  $\mathbf{B}$  ja *sähkövaraus*  $e$ . (Huom. tässä kurssissa  $e$  on mielivaltainen varaus, jolla ei välttämättä ole yhteyttä elektronin varaukseen.) Kaavan (199) oikea puoli tunnetaan *Lorentzin voimana*.

Pienille nopeuksille ( $v \ll c$ ) liikemäärälle  $\mathbf{p}$  (161) voidaan approksimoida  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ , jolloin saadaan jo lukion kurssista tuttu (?) liikkeyhtälö

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (200)$$

Määritellään kaavasta (182) vasemman puolen ensimmäinen termi kineettiseksi energiaksi

$$\mathbb{E}_{\text{kin}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (201)$$

Laskemalla voi helposti osoittaa että

$$\frac{d\mathbb{E}_{\text{kin}}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (202)$$

Sijoittamalla liikkeyhtälöstä (199) ja käyttämällä  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$  saadaan

$$\frac{d\mathbb{E}_{\text{kin}}}{dt} = e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}. \quad (203)$$

Nähdään että vain sähkökenttä tekee työtä, mikä johtuu siitä että magneettikenttä on kohtisuorassa nopeutta vastaan.

### Mittainvarianssi

Kentät  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{B}$  ovat Lorentzin voiman (199) perusteella mitattavissa olevia suureita. Samaa ei täysin voi sanoa nelikentästä  $A^i$ . Nimittäin  $A^i$  voidaan korvata toisella kentällä

$$A'_i = A_i - \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad (204)$$

missä skalaari  $f = f(x^0, x^1, x^2, x^3)$ . Kun tämä sijoitetaan vaikutusintegraaliin (178), syntyy lisätermi

$$\int_a^b e \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \int_a^b e df = ef(b) - ef(a). \quad (205)$$

Tämä on vakio, jolla ei siis voi olla mitään vaikutusta liikkeyhtälöihin. Muunnosta (204) kutsutaan *mittamuunnokseksi*. Todetaan että edellä kehitetty teoria on *mittainvariantti*, eli se ei muutu mittamuunnoksessa. Nelipotentialin komponenteille (177) kirjoitettuna mittamuunnos saa muodon (totea)

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f. \quad (206)$$

On hyvä todeta vielä suoraan että näillä ei ole vaikutusta kenttiin  $\mathbf{E}$  (197) ja  $\mathbf{B}$  (198).

Nähdään että  $f$  voidaan aina valita niin että skalaaripotentiali häviää [ $f = \int \varphi dt$ ]. Sama ei yleisesti ole mahdollista  $\mathbf{A}$ :lle.

### Ajasta riippumaton kenttä

Ajasta riippumattomille kentille  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{B}$  voidaan potentiaalit valita myös ajasta riippumattomiksi. (Perustelu palautuu olennaisesti lauseeseen että jos  $\nabla \times \mathbf{a} = 0$ , niin on olemassa  $g$  siten että  $\mathbf{a} = \nabla g$ .) Ajasta riippumattomassa tapauksessa siis voidaan valita

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \quad (207)$$

ja  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  (198). Siis molemmilla kentillä on omat toisistaan riippumattomat potentiaalit. Nähdään että  $\varphi$  on määritelty vakiota vaille.  $\mathbf{A}$  on sen sijaan on edelleen epämääräinen skalaarifunktion gradientilla.

Kun kenttä ei riipu ajasta, on kokonaisenergia (182) vakio:

$$\mathbb{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi = \mathbb{E}_{\text{kin}} + e\varphi = \text{vakio}. \quad (208)$$

### Ajasta ja paikasta riippumaton kenttä

Jos sähkökenttä  $\mathbf{E}$  ei riipu paikasta, voidaan se esittää potentiaalilla

$$\varphi = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}. \quad (209)$$

Jos magneettikenttä  $\mathbf{B}$  ei riipu paikasta, voidaan se esittää vektoripotentiaalilla

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}. \quad (210)$$

Tämä on *symmetrinen mitta*. Toinen vaihtoehto on *Lan-dawn mitta*

$$A_x = -By, \quad A_y = A_z = 0 \quad (211)$$

kun  $\mathbf{B}$  on  $z$ -suuntaan. Osoita harjoituksena että molemmat mitat antavat vakiomagneettikentän  $B\hat{z}$ , ja osoita että jälkimmäinen saadaan edellisestä mittamuunnosfunktiolla  $f = -xyB/2$ .

### Liike vakiosähkökentässä

Demonstroidaan edellä olevaa teoriaa yksinkertaisessa tapauksessa, missä hiukkanen liikkuu ajallisesti ja paikallisesti vakiossa sähkökentässä  $\mathbf{E} = E\hat{y}$  ( $\mathbf{B} = 0$ ). Liiketyhtälöstä saadaan

$$\dot{p}_x = 0, \quad \dot{p}_y = eE. \quad (212)$$

Tutkitaan tapausta jossa hiukkasella on liikettä myös  $x$ -suuntaan:

$$p_x = p_0, \quad p_y = eEt. \quad (213)$$

Käyttäen kaavaa  $\mathbb{E}_{\text{kin}} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$  saadaan

$$\mathbb{E}_{\text{kin}} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p_0^2 + (ceEt)^2} = \sqrt{\mathbb{E}_0^2 + (ceEt)^2}. \quad (214)$$

Käyttämällä kaavaa  $\mathbf{v} = c^2\mathbf{p}/\mathbb{E}_{\text{kin}}$  saadaan

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2p_0}{\mathbb{E}_{\text{kin}}} = \frac{p_0c^2}{\sqrt{\mathbb{E}_0^2 + (ceEt)^2}}. \quad (215)$$

Nähdään että  $x$ -suuntainen liike on nopeimmillaan kun  $t = 0$ , ja hidastuu kun  $|t|$  kasvaa. Integroimalla saadaan

$$x = \frac{cp_0}{eE} \operatorname{arsinh} \frac{ceEt}{\mathbb{E}_0} \quad (216)$$

mistä

$$\frac{ceEt}{\mathbb{E}_0} = \sinh \frac{eEx}{cp_0}. \quad (217)$$

Analogisesti  $y$ -koordinaatille

$$\frac{dy}{dt} = \frac{c^2eEt}{\mathbb{E}_{\text{kin}}} = \frac{c^2eEt}{\sqrt{\mathbb{E}_0^2 + (ceEt)^2}}. \quad (218)$$

Nähdään että  $y$ -suuntainen nopeus lähenee valon nopeutta kun  $t \rightarrow \infty$ . Integroimalla saadaan

$$y = \frac{1}{eE} \sqrt{\mathbb{E}_0^2 + (ceEt)^2} = \frac{\mathbb{E}_0}{eE} \cosh \frac{eEx}{cp_0}. \quad (219)$$

Liikerata on siis ketjukäyrä  $y = a \cosh bx$ . Epärelativistisella rajalla voidaan approksimoida  $\mathbb{E}_0 = mc^2$  ja  $p_0 = mv_0$  jolloin pienillä  $x$ :n arvoilla

$$y = \text{vakio} + \frac{eEx^2}{2mv_0^2}. \quad (220)$$

Tämä on paraabeli, joka saadaan Newtonin mekaniikan mukaisella laskulla (totea).

### Liike vakiomagneettikentässä

Tutkitaan hiukkasen liikettä ajallisesti ja paikallisesti vakiossa magneettikentässä  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{E} = 0$ ). Liiketyhtälö (199) on tällöin

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (221)$$

Käytetään taas relaatiota  $\mathbf{v} = c^2\mathbf{p}/\mathbb{E}_{\text{kin}}$ . Tietäen että  $\mathbb{E}_{\text{kin}} = \mathbb{E}$  on vakio saadaan

$$\frac{\mathbb{E}}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (222)$$

Kiinnitetään  $\mathbf{B} = B\hat{z}$ , jolloin voidaan kirjoittaa komponenttimuodossa

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0, \quad (223)$$

missä olemme määritelleet

$$\omega = \frac{c^2eB}{\mathbb{E}}. \quad (224)$$

Yhtälöt on kätevä kirjoittaa määrittelemällä kompleksinen nopeus  $v_x + iv_y$ :

$$\frac{d(v_x + iv_y)}{dt} = -i\omega(v_x + iv_y). \quad (225)$$

Tästä nähdään heti ratkaisu

$$v_x + iv_y = a \exp(-i\omega t) \quad (226)$$

Valitsemalla integrointivakio  $a = v_{0t} \exp(i\alpha)$ , saadaan

$$v_x = v_{0t} \cos(\omega t + \alpha), \quad v_y = -v_{0t} \sin(\omega t + \alpha) \quad (227)$$

missä  $\alpha$  on vaihekulma alkuhetkellä ja

$$v_{0t} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (228)$$

on vakionopeus  $x$ - $y$ -tasossa. Integroimalla nopeudet saadaan ratkaistua liike paikka-avaruudessa:

$$x = x_0 + r \sin(\omega t + \alpha), \quad y = y_0 + r \cos(\omega t + \alpha) \quad (229)$$

missä

$$r = \frac{v_{0t}}{\omega} = \frac{v_{0t}\mathbb{E}}{c^2eB} = \frac{p_t}{eB} \quad (230)$$

ja  $p_t$  on liikemäärä  $x$ - $y$ -tasossa. Liike  $z$ -suuntaan on tasais-ta

$$z = z_0 + v_{0z}t. \quad (231)$$

Hiukkanen liikkuu siis helikaalista rataa pitkin, joka sulkeutuu ympyräksi jos  $v_{0z} = 0$ . Kulmataajuutta (224) kutsutaan *syklotronitaajuudeksi*. Epärelativistisella rajalla ( $\mathbb{E} \approx mc^2$ ) se on riippumaton hiukkasen nopeudesta:

$$\omega \approx \frac{eB}{m}. \quad (232)$$

## Liike loivasti muuttuvassa magneettikentässä

Tutkitaan tapausta jossa magneettikenttä muuttuu loivasti paikan funktiona. Koska  $\mathbf{E} = 0$ , on energia vakio ja liikeyhtälö on kuten edellä

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{c^2 e}{\mathbb{E}} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (221)$$

Käytetään sen ratkaisuun *häiriölaskua*. Yleisesti oletetaan että  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  voidaan esittää Taylorin sarjana jonkin pienen parametrin suhteen

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(0)} + \mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{B}^{(2)} + \dots, \quad (233)$$

missä yläindeksi tarkoittaa termin kertalukua. Tässä tapauksessa termit aiheutuvat  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ :n paikkariippuvuudesta:

$$\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{B}(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{B}^{(1)} = ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla) \mathbf{B}|_{\mathbf{r}_0}, \dots \quad (234)$$

Vastaavasti kehittelmä voidaan muodollisesti kirjoittaa myös yhtälön ratkaisulle

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)} + \dots, \quad (235)$$

Sijoittamalla sarjat liikeyhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} & \frac{d(\mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{v}^{(1)} + \dots)}{dt} \\ &= \frac{c^2 e}{\mathbb{E}} (\mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{v}^{(1)} + \dots) \times (\mathbf{B}^{(0)} + \mathbf{B}^{(1)} + \dots) \end{aligned}$$

Jotta tämä yhtälö olisi voimassa, täytyy sen toteutua jokaiselle kertaluvulle erikseen:

$$\frac{d\mathbf{v}^{(0)}}{dt} = \frac{c^2 e}{\mathbb{E}} \mathbf{v}^{(0)} \times \mathbf{B}^{(0)}, \quad (236)$$

$$\frac{d\mathbf{v}^{(1)}}{dt} = \frac{c^2 e}{\mathbb{E}} \left( \mathbf{v}^{(1)} \times \mathbf{B}^{(0)} + \mathbf{v}^{(0)} \times \mathbf{B}^{(1)} \right), \quad (237)$$

Nollannen kertaluvun yhtälö (236) ratkaistiin jo edellä. Sijoitetaan sen ratkaisu (227)-(231) ensimmäisen kertaluvun yhtälöön (237). Valitaan gradienttikehittelmän (233) kehityspisteeksi radan keskipiste (ja ajanhetki  $t = 0$ ), ja rajoitetaan tässä tarkastelemaan vain  $z$ -suuntaista liikettä

$$\begin{aligned} \frac{dv_z^{(1)}}{dt} &= \frac{c^2 e}{\mathbb{E}} \left( B_y^{(1)} v_x^{(0)} - B_x^{(1)} v_y^{(0)} \right) = \frac{c^2 e}{\mathbb{E}} \\ &\times \left\{ \left[ r_0 \sin(\omega_0 t) \frac{\partial B_y}{\partial x} + r_0 \cos(\omega_0 t) \frac{\partial B_y}{\partial y} + v_{0z} t \frac{\partial B_y}{\partial z} \right] \right. \\ &\times v_{0t} \cos(\omega_0 t) \\ &- \left[ r_0 \sin(\omega_0 t) \frac{\partial B_x}{\partial x} + r_0 \cos(\omega_0 t) \frac{\partial B_x}{\partial y} + v_{0z} t \frac{\partial B_x}{\partial z} \right] \\ &\left. \times [-v_{0t} \sin(\omega_0 t)] \right\}, \end{aligned}$$

missä alaindeksi suureissa  $\omega_0$  ja  $r_0$  tarkoittaa, että ne on laskettu kentällä  $\mathbf{B}^{(0)}$ .

Tavoitteenamme on tarkastella  $z$ -suuntaista liikettä mittakaavalla, missä hiukkanen tekee lukuisia kierroksia

$\mathbf{B}^{(0)}$ :n ympäri. Riittää siis tarkastella  $v_z$ :n aikaderivaattaa keskiarvoistettuna useiden kierrosten yli. Vain kaksi termiä kuudesta antaa jotain nollasta poikkeavaa:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle v_z^{(1)} \rangle}{dt} &= \frac{c^2 e}{\mathbb{E}} \frac{1}{2} r_0 v_{0t} \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{v_{0t}^2}{2B_0} \frac{\partial B_z}{\partial z}, \end{aligned} \quad (238)$$

missä jälkimmäisessä muodossa on käytetty kaavaa (230) sekä kaavaa  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  (joka oikeastaan johdetaan vasta myöhemmin).

Edellisestä tuloksesta voidaan johtaa (harjoitus) että yhden kierroksen sisään sulkeutuva magneettivuon

$$\pi r^2 B = \frac{\pi \mathbb{E}^2}{c^4 e^2} \frac{v_t^2}{B} = \text{vakio} \times \frac{v_t^2}{B} \quad (239)$$

on *adiabaattinen invariantti*, eli se ei muutu, jos magneettikentän muutos yhden kierroksen kuluessa on pieni. (Huomaa että magneettikentän kokonaismuutosta pitkän ajan kuluessa ei mitenkään rajoiteta).

Adiabaattisesta invariantista (239) nähdään että jos hiukkanen on kulkemassa kohti kasvavaa magneettikenttää, täytyy myös  $v_t$ :n kasvaa. Kokonaisnopeus  $v^2 = v_t^2 + v_z^2$  pysyy kuitenkin vakiona, koska energia säilyy. Jos magneettikenttä kasvaa niin suureksi että  $v_t = v$ , ei hiukkanen voi enää jatkaa etenemistä  $z$  suuntaan, vaan kääntyy takaisin (pyörien edelleen samaan suuntaan).

Adiabaattinen invarianssi voidaan yleisemmin osoittaa kanonisten muuttujien muodostamalle suurelle

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq \quad (240)$$

(katso Landau-Lifshitz, Mechanics). Yllä käsitellyssä tapauksessa tämä on ekvivalentti kaavan (239) adiabaattisen invariantin kanssa (epäoleennaista vakiotekijää lukuun ottamatta).

## Kenttätensori

Edellä johdettiin liikeyhtälöt käsittelemällä aika- ja paikkakoordinaatteja erikseen. Yritetään nyt johtaa liikeyhtälöt suoraan nelivektorimuodossa. Lähtökohtana on vaikutusintegraali (178), jonka variaation

$$\delta S = \delta \int_a^b (-mcds - eA_i dx^i) \quad (241)$$

pitää hävitä kun varioidaan hiukkasen polkua:  $x^i \rightarrow x^i + \delta x^i$ . (Huom. relativistisessä teoriassa myös aikakoordinaattia pitää voida varioida, joten poiketen analyttisen mekaniikan kurssissa käytetystä sopimuksesta  $\delta x^0 = c\delta t \neq 0$ . Ainoa rajoitus on että variaatiot häviävät nelipisteissä  $a$  ja  $b$ .) Katsotaan ensin viivaelementin  $ds = \sqrt{dx_i dx^i}$  variaatiota

$$\begin{aligned} \delta ds &= \frac{\partial ds}{\partial dx^k} \delta dx^k = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{dx_i dx^i}} 2dx_k \delta dx^k \\ &= \frac{dx_k \delta dx^k}{ds} = u_k \delta dx^k. \end{aligned} \quad (242)$$

Myösinkin voidaan muuttaa järjestystä  $\delta dx^k = d\delta x^k$ . Vaikutusintegraalin variaatiolle lasketaan sitten

$$\delta S = \int_a^b (-mcu_k d\delta x^k - e\delta A_i dx^i - eA_i d\delta x^i). \quad (243)$$

Osittaisintegroimalla saadaan (sijoitustermit häviävät)

$$\delta S = \int_a^b (mc\delta x^k du_k - e\delta A_i dx^i + e\delta x^k dA_k). \quad (244)$$

Ilmaisemalla kaikki integroinnit viivaelementin  $ds$  avulla ja kaikki variaatiot  $\delta x^k$ :n avulla saadaan

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_a^b \left( mc\delta x^k \frac{du_k}{ds} ds - e \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^k u^i ds + e\delta x^k \frac{\partial A_k}{\partial x^i} u^i ds \right) \\ &= \int_a^b \left( mc \frac{du_k}{ds} - e \frac{\partial A_i}{\partial x^k} u^i + e \frac{\partial A_k}{\partial x^i} u^i \right) \delta x^k ds. \end{aligned}$$

Koska variaatiot  $\delta x^k(s)$  ovat riippumattomia, voi tämä hävitä vain jos sulkulauseke häviää kaikille  $k = 0, 1, 2$  ja 3. Saadaan siis

$$mc \frac{du_k}{ds} = e \left( \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \right) u^i. \quad (245)$$

Määritellään *sähkömagneettinen kenttätensori*

$$F_{ki} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}. \quad (246)$$

Sen avulla saadaan

$$mc \frac{du_k}{ds} = e F_{ki} u^i. \quad (247)$$

Tämä on liikeyhtälö nelivektori muodossa esitettynä.

Harjoitus 1. Sijoittamalla  $A_i = (\varphi/c, -\mathbf{A})$  kenttätensorin määritelmään osoita, että esimerkiksi  $F_{01} = E_x/c$  ja koko tensori

$$\begin{aligned} (F_{ki}) &= \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (248) \\ (F^{ki}) &= \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Harjoitus 2. Osoita että liikeyhtälön (247) paikkakomponentit antavat aiemman 3-vektoriliikeyhtälön (199). Samaten osoita että aikakomponentti antaa energiayhtälön (203).

### Kentän Lorentz-muunnos

Pyritään selvittämään kuinka  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{B}$  muuttuvat Lorentz-muunnoksessa. Kenttätensorista (248) nähdään

että  $-E_x/c$  muuntuu kuten yleisten nelivektorien tulo  $C^0 D^1$ :

$$\begin{aligned} C^0 D^1 &= \frac{C'^0 + \frac{V}{c} C'^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \frac{D'^1 + \frac{V}{c} D'^0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ &= \frac{C'^0 D'^1 + \frac{V}{c} (C'^0 D'^0 + C'^1 D'^1) + \frac{V^2}{c^2} C'^1 D'^0}{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \end{aligned}$$

Tästä päätellään

$$G^{01} = \frac{G'^{01} + \frac{V}{c} (G'^{00} + G'^{11}) + \frac{V^2}{c^2} G'^{10}}{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Soveltamalla tätä antisymmetriseen kenttätensoriin, havaitaan että  $F^{01} = F'^{01}$ , siis  $E_x = E'_x$ . Samaan tapaan jatkaen saadaan muunnoskaavat

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & E_y &= \frac{E'_y + V B'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & E_z &= \frac{E'_z - V B'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ B_x &= B'_x, & B_y &= \frac{B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & B_z &= \frac{B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (249)$$

Näistä kaavoista nähdään, että jos  $K'$ :ssa ainoastaan  $B'_z \neq 0$ , niin  $K$ :ssa havaitaan samansuuntainen magneettikenttä  $B_z = B'_z / \sqrt{1 - V^2/c^2}$ , mutta myös sähkökenttä

$$\mathbf{E} = V B_z \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{B} \times \mathbf{V}. \quad (250)$$

Käytetään tätä yleistämään edellä laskettu vakio magneettikentän tapaus siihen että vakio kentät  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{B}$  ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa. Toteamme (harjoitus) että tuloksena on helikaalinen liike magneettikentässä  $\mathbf{B}' = \mathbf{B} \sqrt{1 - (E/cB)^2}$  yhdistettynä heliksin akselin liikkeeseen nopeudella  $\mathbf{V} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2$ .

### Kentän invariantit

Kenttätensorista (248) voidaan muodostaa seuraavat neliskalaarit

$$I_1 = F^{ik} F_{ik}, \quad I_2 = e^{iklm} F_{ik} F_{lm}. \quad (251)$$

Koska neliskalaarit eivät muutu koordinaattimuunnoksissa, todetaan pienellä laskulla että kombinaatiot

$$E^2 - c^2 B^2 = -\frac{1}{2} c^2 I_1, \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = -\frac{1}{8} c I_2 \quad (252)$$

ovat koordinaatistosta riippumattomia. Nähdään siis että jos  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{B}$  ovat kohtisuoria jossain koordinaatistossa, ne ovat kohtisuoria kaikissa koordinaatistoissa (tai erikoistapauksessa toinen häviää).

### Pariteetti ja ajankääntö

Edellä olemme tarkastelleet sitä miten fysikaalinen teoria käyttäytyy eri koordinaattimuunnoksissa. Yhteistä kaikille muunnoksille on ollut että ne muodostavat matemaattisen *ryhmän*. Edellä tarkastellut tapaukset lisäksi muodostavat jatkuvan ryhmän, jossa jokainen muunnos on

ollut jatkuvasti muunnettavissa identiteettimuunnoksiksi. Esim. Lorentz-muunnos (132) muuttuu identiteetiksi, kun koordinaatistojen suhteellinen nopeus lähestyy nollaa.

Joskus on hyödyllistä tutkia myös muunnoksia, jotka eivät ole jatkuvasti muunnettavissa identiteeteiksi. Tässä tarkastellaan kahta sellaista.

*Pariteettimuunnos* eli *inversio* tarkoittaa että avaruuden paikkavektorin merkki muutetaan

$$\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}, \quad t \rightarrow t. \quad (253)$$

Aikaa ei siis muuteta tässä. Pariteettimuunnoksessa teoria muuttuu toiseksi teoriaksi. Monissa tapauksissa tämän uuden teorian liikeyhtälöiden muoto on sama kuin alkuperäinen. Joissain tapauksissa liikeyhtälöt ovat jopa identtiset alkuperäisten kanssa. Esimerkiksi Newtonin mekaniikassa pariteettimuunnoksella ei ole vaikutusta Lagrangen funktion

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \quad (254)$$

kineettisen energian termiin mutta potentiaali  $V(\mathbf{r})$  korvautuu potentiaalilla  $V(-\mathbf{r})$ . Myös liikeyhtälöiden muoto

$$\dot{\mathbf{p}} = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (255)$$

säilyy sillä  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$  ja  $\nabla V(\mathbf{r}) \rightarrow -\nabla V(-\mathbf{r})$ . Erityisesti keskeispotentiaalissa  $V = V(r)$  liikeyhtälöt säilyvät täsmälleen samanlaisina.

Kolmivektoreita jotka muuttuvat pariteettimuunnoksessa kuten paikkavektori (253) kutsutaan *polaarisiksi*. Näitä ovat esim.  $\mathbf{v}$  ja  $\mathbf{p}$ . Toiset vektorit taas eivät muuta merkkiään, esim. kulmaliikemäärä  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \rightarrow (-\mathbf{r}) \times (-\mathbf{v}) = \mathbf{L}$ . Tällaista vektoria kutsutaan *aksiaaliseksi*.

Jotta Lorentz-voiman lauseke (199) säilyisi pariteettimuunnoksessa, todetaan että  $\mathbf{E}$  on polaarinen ja  $\mathbf{B}$  aksiaalinen vektori.

Nelivektoria, joka muuntuu pariteettimuunnoksessa (253) kuten nelivektori  $(ct, \mathbf{r})$  [siis  $(ct, \mathbf{r}) \rightarrow (ct, -\mathbf{r})$ ], kutsutaan todelliseksi nelivektoriksi. Yleisemmin tensoria, jonka komponentit muuntuvat kuten todellisten nelivektorien tulot, kutsutaan *todelliseksi tensoriksi*. Tensoria, johon tulee tämän lisäksi ylimääräinen miinusmerkki kutsutaan *pseudotensoriksi*. Erityisesti neliskalaari on todellinen, jos se ei muuta merkkiä, ja pseudoskalaari, jos se muuttaa merkkiään pariteettimuunnoksessa.

Nähdään että metrinen tensori (140) on todellinen, kun taas  $e^{iklm}$  on pseudotensori. Kenttätensori  $F^{ik}$  (248) on todellinen tensori. Skalaareista (251)  $I_1$  on todellinen ja  $I_2$  pseudoskalaari.

Toinen mahdollinen diskreetti muunnos on *ajankääntö*:

$$t \rightarrow -t, \quad \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}. \quad (256)$$

Lorentz-liikeyhtälö (199) säilyy muuttumattomana ajankäännössä kun  $\mathbf{E}$  pysyy muuttumattomana ja  $\mathbf{B}$  vaihtaa merkkiään.

Yleisesti voidaan todeta että sähkömagnetismin teoria on invariantti sekä pariteettimuunnoksessa että

ajankäännössä: kaikki suureet muuttuvat niin että liikeyhtälöiden muoto säilyy. Tämä ei kuitenkaan ole luonnon yleinen ominaisuus: heikoissa vuorovaikutuksissa ei ole pariteetti- ja ajankääntösymmetriaa. Myöskään makroskooppiset yhtälöt eivät useimmiten ole invariantteja ajankäännössä koska niissä esiintyy kitkavoimia. Sen ymmärtäminen, että makromaailmassa ei ole ajankääntösymmetriaa vaikka mikrotasolla se on voimassa, on yksi tilastollisen fysiikan keskeisistä kysymyksistä.



## 7. Sähkömagneettiset kenttäyhtälöt

Edellä tutkittiin varausten liikettä sähkömagneettisessa kentässä. Nyt pyrimme ymmärtämään miten itse kenttä syntyy. Katsotaan kuitenkin ensin, mitä tiedetään sähkö- ja magneettikentistä jo edellisen perusteella.

### 7.1 Maxwellin yhtälöt

#### Ensimmäiset kaksi Maxwellin yhtälöä

Edellä johdimme yhtälöt

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \quad (197)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (198)$$

Ensimmäisestä voidaan laskea

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \times \nabla \varphi. \quad (257)$$

Jälkimmäinen termi häviää koska yleisesti  $\nabla \times \nabla = 0$ . Sijoittamalla (198) saadaan

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (258)$$

Käyttämällä hyväksi  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{C}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \mathbf{C} = 0$  saadaan yhtälöstä (198)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (259)$$

Yhtälöitä (258) ja (259) kutsutaan kahdeksi ensimmäiseksi *Maxwellin yhtälöiksi*.

Maxwellin yhtälöt voidaan esittää myös integraalimuodossa. Integroidaan (259) tilavuuden  $V$  yli ja käytetään Gaussin lausetta

$$0 = \int dV \nabla \cdot \mathbf{B} = \oint d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}, \quad (260)$$

mistä saadaan

$$\oint d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (261)$$

Vastaavasti integroidaan (258) pinnan  $A$  yli

$$\int d\mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = - \int d\mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (262)$$

Sovelletaan Stokesin lausetta

$$\int d\mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = \oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}, \quad (263)$$

jolloin saadaan

$$\oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} = -\frac{d}{dt} \int d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}. \quad (264)$$

Yhtälöt (264) ja (261) ovat kaksi ensimmäistä Maxwellin yhtälöä integraalimuodossa.

Maxwellin yhtälöt voidaan esittää myös nelivektorimuodossa. Kenttätensoren määritelmästä (246) voidaan laske- malla nähdä että

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0 \quad (265)$$

Tarkempi tutkiskelu osoittaa että tällä on tasan neljä riippumatonta komponenttia, jotka ovat identtisiä Maxwellin yhtälöiden (258) ja (259) kanssa.

#### Kentän vaikutusintegraali

Jotta saisimme täydellisen sähkömagnetismin teorian, meidän olisi luotava yhtälöt jotka kuvaavat miten kenttä syntyy. Esimerkki tällaisesta relaatiosta on *Coulombin laki*, joka sanoo, että pistevaraus  $e$  pisteessä  $\mathbf{r}_0$  synnyttää sähkökentän

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^3}. \quad (266)$$

Tässä on kuitenkin se vika, että se ei täytä suhteellisuusteorian vaatimusta. Kaava (266) nimittäin antaa että jos varauksen paikka  $\mathbf{r}_0$  muuttuu, muuttuu sähkökenttä *samanaikaisesti* kaikkialla avaruudessa. Suhteellisuusteoriasta taas seuraa että valon nopeus on signaalin maksimi etenemisnopeus. Suhteellisuusteoria siis vaatii että luovumme vuorovaikutuksista, jotka vaikuttavat välittömästi kahden eri pisteen välillä.

Ongelma voidaan ratkaista siten, että kuvaamme sähkökenttää yhtälöillä, joissa esiintyy vain infinitesimaalisen lähellä toisiaan olevia pisteitä. Toisin sanoen, kuvaamme sitä differentiaaliyhtälöillä.

Konkreettisenä mallina toimii kurssissa edellä esitetty jatkuvan materian käsittely: siinä kukin massapiste vuorovaikuttaa suoraan vain lähinaapurinsa kanssa. Pyritään siis muotoilemaan sähkömagnetismi siten että nelipotentialiaali  $A^i$  muodostaa jatkuvan materian kaltaisen kentän. Hamiltonin periaatteessa myös  $A^i$ :n funktionaalista riippuvuutta koordinaateista ( $x^0, x^1, x^2, x^3$ ) on siis varioitava.

Nähdään pian, että edellä kirjoitettu vaikutusintegraali (178) ei ole riittävä. Sen sijaan meidän on kirjoitettava vaikutusintegraali joka yleisesti on muotoa

$$S = S_m + S_k + S_{mk}. \quad (267)$$

Tässä ensimmäinen termi on vapaiden hiukkasten (materian) osuus (159). Toinen termi on kentän vaikutusintegraali, silloin kun materiaa ei ole paikalla. Viimeinen on termi, joka kuvaa materian ja kentän kytkeytymistä toisiinsa. Toistaiseksi olemme tarvinneet vain osaa  $S_m + S_{mk}$  (178). Kun haluamme johtaa kentän yhtälöt, meidän olisi tunnettava myös  $S_k$ .

Perustamme  $S_k$ :n johdon seuraaviin oletuksiin. Ensimmäinen oletamme (kuten jo edellä  $S_m + S_{mk}$ :lle) että sen täytyy olla esitettävissä nelitensoreilla. Toiseksi oletamme, että sähkömagnetismi on mittainvariantti teoria. Tästä seuraa, että  $S_k$  täytyy olla ilmaistavissa mittainvariantin suureen  $F^{ki}$  avulla (tai jos  $A^i$  esiintyy eksplisiittisesti, täytyy mittainvarianssi erityisesti osoittaa, kuten termin  $S_{mk}$  tapauksessa.) Kolmanneksi oletamme että kentän

yhtälöiden tulee olla lineaariset. Tämä perustuu kokeellisiin havaintoihin: jos varaukset 1 synnyttävät kentät  $\mathbf{E}_1$  ja  $\mathbf{B}_1$  ja varaukset 2 kentät  $\mathbf{E}_2$  ja  $\mathbf{B}_2$ , näiden varausten yhdessä muodostamat kentät ovat  $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$  ja  $\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ .

Väitämme että ainut kaikki ehdot täyttävä vaihtoehto on

$$S_k = -a \int dt dV F^{ik} F_{ik}. \quad (268)$$

Tässä  $a$  on vakio. Integrointi on koko neliavaruuden yli ( $dV = dx^1 dx^2 dx^3$ ). Voidaan osoittaa että pseudoinvariantti  $I_2$  (251) on kokonaisdifferentiaali, ja siksi se lisää vain vakion vaikutusintegraaliin.

Osoittautuu että vakio  $a$  ei ole fysikaalisesti oleellinen. Sen valinta kiinnittää sähkösuureiden yksiköt. Tässä kursissa käytämme SI järjestelmää, missä vakiolla on arvo  $a = 1/(4\mu_0)$ , missä  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ kg m/C}^2$ . Tässä coulombi  $C$  on sähkövarauksen yksikkö. Määrittelemme myös toisen vakion  $\epsilon_0 = 1/(c^2 \mu_0)$ . [Teoreettisen fysiikan kannalta olisi ollut kätevää valita  $a$  paljaaksi luvuksi, esimerkiksi cgs yksiköissä  $a = 1/(16\pi)$ . Mielestäni on kuitenkin tärkeämpää että käytämme yksikköjärjestelmää jonka käytöstä on kansainvälisesti sovittu.]

Kirjoitamme vielä kentän vaikutusintegraalin nelivektorimuodossa

$$S_k = -\frac{1}{4\mu_0 c} \int d\Omega F^{ik} F_{ik} \quad (269)$$

( $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ ) sekä kolmivektorimuodossa

$$S_k = \frac{\epsilon_0}{2} \int dt dV (E^2 - c^2 B^2). \quad (270)$$

Koko vaikutusintegraali on

$$S = -\sum \int mcds - \sum \int eA_i dx^i - \frac{1}{4\mu_0 c} \int d\Omega F^{ik} F_{ik}, \quad (271)$$

missä summaukset ovat eri hiukkasten yli. Tämä on täydellinen vaikutusintegraali klassisille hiukkasille joiden välillä on sähkömagneettisia vuorovaikutuksia.

### Nelivirta

Edellä on tarkasteltu diskreettejä pistemäisiä varauksia. Jatkossa on kuitenkin kätevää tarkastella varausta jatkuvana suureena. Määritellään *varaustiheys*  $\rho$  siten että  $\rho dV$  antaa tilavuuselementissä  $dV$  olevan varauksen. Jatkuvasta varauksesta voi aina siirtyä diskreettiin tapaukseen kirjoittamalla  $\rho$  summaksi deltafunktioita:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_k e_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k), \quad (272)$$

missä  $\mathbf{r}_k$  on varauksen  $e_k$  paikka.

Varaus on koordinaatistosta riippumaton suure. Siksi myös  $de = \rho dV$ :n täytyy olla. Kerrotaan tämän molemmat puolet  $dx^i$ :llä:

$$de dx^i = \rho dV dx^i = \rho dV dt \frac{dx^i}{dt} \quad (273)$$

Tämän suureen täytyy olla nelivektori. Koska tilavuuselementti  $d\Omega = dV dt$  on neliskalaari, päädytään siihen että *nelivirta*

$$j^i = \rho \frac{dx^i}{dt} \quad (274)$$

muodostaa nelivektorin. Nelivirran paikkaosa on *sähkövirrantiheys*

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}. \quad (275)$$

Nelitensorin aikaosaksi saadaan  $c\rho$ , joten nelitensori voidaan kirjoittaa

$$j^i = (c\rho, \mathbf{j}). \quad (276)$$

Kokonaisvaraukselle voidaan kirjoittaa integraali

$$\int dV \rho = \frac{1}{c} \int dV j^0 = \frac{1}{c} \int dS_k j^k. \quad (277)$$

Tässä viimeisessä muodossa on paikkaintegrointi ajateltu integroinniksi neliulotteisen avaruuden 3-ulotteisen hyperpinnan yli, missä  $dS_k = (dV, \mathbf{o})$  tätä hypertasoa vastaan kohtisuora vektori jonka pituus on hypertason elementin koko. Yleisemmin integraali

$$\frac{1}{c} \int dS_k j^k. \quad (278)$$

voidaan ajatella kolmiulotteisen hyperpinnan yli, jonka normaali ei välttämättä ole vakio vaan koordinaattiriippuva ajanluonteinen nelivektori. Integraali antaa niiden varausten summan, joiden maailmanviiva kulkee tämän hyperpinnan läpi, ts. niillä on yksi tapahtuma tällä hyperpinnalla.

Kirjoitetaan vaikutusintegraalin (271) kytkentätermi varausstiheyden avulla:

$$\begin{aligned} -\sum \int dx^i e A_i &= -\int dV \int dx^i \rho A_i \\ &= -\int dV \int dt \frac{dx^i}{dt} \rho A_i = -\frac{1}{c} \int d\Omega j^i A_i. \end{aligned} \quad (279)$$

Tätä muotoa käyttäen vaikutusintegraali (271) saa muodon

$$S = -\sum \int mcds - \frac{1}{c} \int d\Omega j^i A_i - \frac{1}{4\mu_0 c} \int d\Omega F^{ik} F_{ik}, \quad (280)$$

### Toiset kaksi Maxwellin yhtälöä

Seuraavaksi varioimme vaikutusintegraalia (280) kentän suhteen. Variointi hiukkasten paikkojen suhteen on jo tehty edellä sillä viimeinen termi ei vaikuta siihen. Varioinnissa kentän suhteen ensimmäinen termi ei vaikuta ja saadaan

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int d\Omega \left( j^i \delta A_i + \frac{1}{2\mu_0} F^{ik} \delta F_{ik} \right). \quad (281)$$

Käyttäen kenttätensorin määritelmää (246) saadaan

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int d\Omega \left( j^i \delta A_i + \frac{1}{2\mu_0} F^{ik} \frac{\partial \delta A_k}{\partial x^i} - \frac{1}{2\mu_0} F^{ik} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^k} \right). \quad (282)$$



Osittaisintegrointi antaa (hyperpintatermit häviävät)

$$\begin{aligned}\delta S &= \\ &= -\frac{1}{c} \int d\Omega \left( j^i \delta A_i - \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^i} \delta A_k + \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \delta A_i \right) \\ &= -\frac{1}{c} \int d\Omega \left( j^i - \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial F^{ki}}{\partial x^k} + \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \right) \delta A_i \\ &= -\frac{1}{c} \int d\Omega \left( j^i + \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \right) \delta A_i.\end{aligned}\quad (283)$$

Koska variaatiot  $A_i$  ovat mielivaltaisia, voi  $\delta S = 0$  vain jos sulkulauseke häviää.

Saadaan siis

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\mu_0 j^i. \quad (284)$$

Tässä on neljä yhtälöä ( $i = 0, 1, 2$  ja  $3$ ). Esimerkiksi

$$\frac{\partial F^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} = -\mu_0 j^1, \quad (285)$$

eli

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0 j_x. \quad (286)$$

Vastaavasti komponenteille  $i = 2$  ja  $3$ , joista yhdessä saadaan

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}. \quad (287)$$

Komponentille  $i = 0$  saadaan

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (288)$$

Yhtälöt (287) ja (288) ovat jälkimmäiset kaksi Maxwellin yhtälöä. Yhdessä aikaisempien (258) ja (259) kanssa

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (289)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (290)$$

ne täysin määräävät sähkömagneettisen kentän dynamiikan. Huomaa että yhtälöt ovat lineaariset, kuten edellä vaadittiin.

Uudet yhtälöt voidaan myös kirjoittaa integraalimuodossa. Samoin kuin edellisten kanssa saadaan

$$\oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int d\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} + \mu_0 \int d\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}. \quad (291)$$

ja

$$\oint d\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int dV \rho. \quad (292)$$

Tässä kurssissa on edellä käsitelty jatkuvuusyhtälöä energialle (105). Vastaava yhtälö sähkövaraukselle on

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (293)$$

joka nelivektorimuodossa voidaan kirjoittaa

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0. \quad (294)$$

Varauksen jatkuvuusyhtälö seuraa välittömästi Maxwellin yhtälöistä. Tämä on erityisen helppo nähdä käyttäen nelivektorimuotoa (284):

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = -\mu_0 \frac{\partial^2 F^{ik}}{\partial x^i \partial x^k}, \quad (295)$$

mikä häviää koska kenttätensori  $F^{ik}$  on antisymmetrinen. Johda harjoituksena säilymlaki (293) kolmivektorimuotoisista Maxwellin yhtälöistä.

## 7.2 Energia ja liikemäärä

### Yleinen johto

Yleisen kenttäteorian yhteydessä tarkastelimme Lagrangen funktiota (90) jota vastaava vaikutusintegraali on

$$S = \int dt \int dV \mathcal{L} \left( u^{(\ell)}, \nabla u^{(\ell)}, \frac{\partial u^{(\ell)}}{\partial t}; \mathbf{x}, t \right). \quad (296)$$

(Olemme ottaneet mukaan sen mahdollisuuden että kenttiä on useampia kuin yksi, mistä aiheutuu indeksi kentässä  $u^{(\ell)}$ .) Nelivektoreiden avulla tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$S = \frac{1}{c} \int d\Omega \mathcal{L} \left( u^{(\ell)}, \frac{\partial u^{(\ell)}}{\partial x^i}; x^i \right). \quad (297)$$

Tästä johdettiin Lagrangen liikeyhtälöt (92), jotka nelivektorein kirjoitamme muotoon

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u^{(\ell)} / \partial x^i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^{(\ell)}} = 0, \quad (298)$$

missä summaussopimuksemme mukaan on summaus yli  $i:n$ .

Itse asiassa olisimme voineet johtaa jälkimmäiset Maxwellin yhtälöt (284) suoraan käyttämällä Lagrangen liikeyhtälöä (298).

Jatkossa tutkimme Lagrangen tiheyttä, jossa ei ole eksplisiittistä riippuvuutta koordinaateista  $x^i$ , siis

$$S = \frac{1}{c} \int d\Omega \mathcal{L} \left( u^{(\ell)}, \frac{\partial u^{(\ell)}}{\partial x^i} \right). \quad (299)$$

Yleisen kenttäteorian tapauksessa tutkittiin tapausta, jossa  $\mathcal{L}$  ei riippunut eksplisiittisesti ajasta  $t$ . Tällöin Hamiltonin tiheydelle saatiin johdettua lokaali säilymlaki (105). Nyt meillä on vastaava tilanne myös paikka-koordinaattien osalta, joten odotamme kolmea uutta säilymlakia. Osoitamme seuraavassa että *energia-liikemäärätensori*

$$T_i^k = \sum_{\ell} \frac{\partial u^{(\ell)}}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u^{(\ell)} / \partial x^k)} - \delta_i^k \mathcal{L} \quad (300)$$

toteuttaa säilymlain

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0. \quad (301)$$

Todistus ei olennaisesti poikkea aiemmista vastaavista:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} &= \frac{\partial^2 u^{(\ell)}}{\partial x^k \partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u^{(\ell)}/\partial x^k)} \\ &+ \frac{\partial u^{(\ell)}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u^{(\ell)}/\partial x^k)} - \delta_i^k \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^{(\ell)}} \frac{\partial u^{(\ell)}}{\partial x^k} \right. \\ &\left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u^{(\ell)}/\partial x^m)} \frac{\partial^2 u^{(\ell)}}{\partial x^k \partial x^m} \right) = 0, \end{aligned} \quad (302)$$

missä termit kumoavat toisensa, kaksi keskimmäistä käyttäen liikeyhtälöä (298).

Olemme siis saaneet neljä kappaletta lokaalisia säilymlakeja (301). Erityisesti komponentti

$$T^{00} = \sum_{\ell} \frac{\partial u^{(\ell)}}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u^{(\ell)}/\partial t)} - \mathcal{L} = \mathcal{H} \quad (303)$$

antaa energiatiheyden. Säilyvä integraalisuure

$$P^i = \frac{1}{c} \int T^{i0} dV = \frac{1}{c} \int T^{ik} dS_k \quad (304)$$

on siten identifioitavissa neliliikemääräksi (172).

Säilymlaki (301) ei määrää yksikäsitteisesti energia-liikemäärätensoria  $T^{ik}$ . Voidaan nimittäin aina muodostaa toinen tensori

$$T'^{ik} = T^{ik} + \frac{\partial}{\partial x^l} \psi^{ikl}. \quad (305)$$

Jos funktio  $\psi^{ikl}$  on antisymmetrinen kahden viimeisen indeksinsä suhteen ( $\psi^{ikl} = -\psi^{ilk}$ ), nähdään

$$\frac{\partial T'^{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x^k \partial x^l} \psi^{ikl} = 0. \quad (306)$$

Voidaan osoittaa, että tämä epämääräisyys poistuu, jos vaaditaan että säilyvä kulmaliikemäärän nelivektori konstruoidaan yksinkertaisesti  $T^{ik}$ :n avulla. Tästä vaatimuksesta seuraa, että  $T^{ik}$ :n täytyy olla symmetrinen. (Katso Landau-Lifshitz, Classical theory of fields.)

Kirjoitetaan säilymlaki (301) integraalimuodossa samaan tapaan kuin energian tapauksessa (105)-(109). Erotellaan ensin aika- ja paikkaderivaatat ( $\alpha = 1, 2$  ja  $3$ ):

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (307)$$

Integroidaan tilavuuden  $V$  yli ja muutetaan pintaintegraaliksi

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int dV T^{i0} = - \int dV \frac{\partial T^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} = - \oint da^\alpha T^{i\alpha}. \quad (308)$$

Energialle ( $i = 0$ ) tämä on sama kuin (108) ja voimme identifoida energiavirrantiheyden  $\mathbf{S} = (cT^{01}, cT^{02}, cT^{03})$ . Komponenteille  $i = 1, 2$  ja  $3$  vasen puoli antaa liikemäärä aikaderivaatan tilavuudessa  $V$ . Oikea puoli siis kuvaa tilavuuteen ulkopuolelta kohdistuvaa voimaa. Tässä esiintyvää

kolmitensoria  $T^{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}$  kutsutaan jännitystensoriksi. Tilavuuteen  $V$  ulkopuolelta kohdistuva voima  $\mathbf{F}$  siis

$$\mathbf{F}_\beta = - \oint da_\alpha \sigma_{\beta\alpha}. \quad (309)$$

(tässä  $da_\alpha = da^\alpha$ .) Koko energia-liikemäärätensori voidaan siis kirjoittaa

$$(T^{ik}) = \begin{pmatrix} \mathcal{H} & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y/c & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z/c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (310)$$

## Pelkkä sähkömagneettinen kenttä

Tarkastellaan ensin kenttää ilman varauksia, jolloin

$$\mathcal{L} = - \frac{1}{4\mu_0} F^{ij} F_{ij}. \quad (311)$$

Koska riippumattomat muuttujat ovat  $A^i$  saadaan

$$T_i^k = \frac{\partial A_l}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial A_l/\partial x^k)} - \delta_i^k \mathcal{L}. \quad (312)$$

Lasketaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial A_l/\partial x^k)} &= - \frac{1}{2\mu_0} F^{ij} \frac{\partial F_{ij}}{\partial(\partial A_l/\partial x^k)} \\ &= - \frac{1}{2\mu_0} F^{ij} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) = - \frac{1}{\mu_0} F^{kl}. \end{aligned} \quad (313)$$

Näin saadaan

$$T^{ik} = - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_l}{\partial x_i} F^{kl} + \frac{1}{4\mu_0} g^{ik} F^{lm} F_{lm}. \quad (314)$$

Tämä ei ole symmetrinen. Se saadaan symmetriseksi lisäämällä termi

$$+ \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A^i}{\partial x^l} F^{kl} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x^l} (A^i F^{kl}), \quad (315)$$

missä puhdas divergenssimuoto on seurasta Maxwellin yhtälöstä (284) ja oletuksesta  $j^i = 0$ . Lisäksi  $\psi^{ikl} = A^i F^{kl}/\mu_0$  on antisymmetrinen kahden viimeisen indeksinsä suhteen, joten  $T^{ik}$ :n säilymlaki ei muutu (306).

Saadaan siis sähkömagneettisen kentän energia-liikemäärätensori

$$T^{ik} = \frac{1}{\mu_0} \left( -F^i_l F^{kl} + \frac{1}{4} g^{ik} F^{lm} F_{lm} \right). \quad (316)$$

Se on symmetrinen. Sen jälki

$$T_i^i = 0. \quad (317)$$

Laskemalla komponentteittain saadaan energiatiheys

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{E^2}{c^2} + B^2 \right) = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2, \quad (318)$$

energiavirrantiheydelle *Poyntingin vektori*

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (319)$$

sekä *Maxwellin jännitystensori*

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\epsilon_0}{2} (-E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) + \frac{1}{2\mu_0} (-B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \\ \sigma_{xy} &= -\epsilon_0 E_x E_y - \frac{1}{\mu_0} B_x B_y, \end{aligned}$$

jne. Yleisemmin

$$\sigma_{\alpha\beta} = \epsilon_0 \left( \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} E^2 - E_\alpha E_\beta \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} B^2 - B_\alpha B_\beta \right). \quad (320)$$

### Sähkömagneettinen kenttä varauksien kanssa

Kun materiaa on paikalla, koostuu energia-liikemäärätensori kentän ja hiukkasten osuudesta:

$$T_i^k = T^{(k)}_i{}^k + T^{(m)}_i{}^k. \quad (321)$$

Lasketaan ensin kentän osuuden divergenssi

$$\frac{\partial T^{(k)}_i{}^k}{\partial x^k} = \frac{1}{\mu_0} \left( -\frac{\partial F_{il}}{\partial x^k} F^{kl} - F_{il} \frac{\partial F^{kl}}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \delta_i^k F^{lm} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} \right). \quad (322)$$

Käytetään hyväksi (284) ja (265)

$$\frac{\partial F^{kl}}{\partial x^k} = \mu_0 j^l, \quad \frac{\partial F_{lm}}{\partial x^i} = -\frac{\partial F_{il}}{\partial x^m} - \frac{\partial F_{mi}}{\partial x^l}, \quad (323)$$

jolloin

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{(k)}_i{}^k}{\partial x^k} &= \frac{1}{\mu_0} \left( -\frac{\partial F_{il}}{\partial x^k} F^{kl} - \mu_0 F_{il} j^l - \frac{1}{2} F^{lm} \frac{\partial F_{il}}{\partial x^m} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} F^{lm} \frac{\partial F_{mi}}{\partial x^l} \right) = -F_{il} j^l, \end{aligned} \quad (324)$$

missä muiden termien kumoutuminen havaitaan sopivilla summausmuuttujanvaihoilla.

Pyritään seuraavaksi muodostamaan materiaan osuus. Edellä määrittelimme varaustiheyden  $\rho$  (272). Analogisesti  $\rho$ :n kanssa määrittelimme massatiheyden

$$\zeta(\mathbf{r}) = \sum_k m_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k). \quad (325)$$

Käyttäen neliliikemäärän lauseketta (171) voimme tästä määrittellä myös materiaan neliliikemäärän tiheyden

$$\zeta c u_i. \quad (326)$$

Varaustiheydestä  $\rho$  päätelimme nelivirran  $j^k = \rho(dx^k/dt)$ . Täysin analogisesti voimme nyt neliliikemäärän tiheydestä päätellä sen nelivirran

$$T^{(m)}_i{}^k = \zeta c u_i \frac{dx^k}{dt}, \quad (327)$$

joka on haluttu materiaan osuus energia-liikemäärätensorista. Tämä on symmetrinen tensori sillä

$$T^{(m)ik} = \zeta c u^i \frac{dx^k}{dt} = \zeta c u^i u^k \frac{ds}{dt}. \quad (328)$$

Lasketaan

$$\frac{\partial T^{(m)}_i{}^k}{\partial x^k} = c u_i \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \zeta \frac{dx^k}{dt} \right) + c \zeta \frac{\partial u_i}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt}. \quad (329)$$

Analogisesti nelisähkövirran säilymisen kanssa (294) toteuttaa myös massavirta  $\zeta(dx^k/dt)$  säilymislain joka on

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left( \zeta \frac{dx^k}{dt} \right) = 0. \quad (330)$$

Siis ensimmäinen termi lausekkeessa (329) häviää ja saadaan

$$\frac{\partial T^{(m)}_i{}^k}{\partial x^k} = c \zeta \frac{\partial u_i}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt} = c \zeta \frac{du_i}{dt}. \quad (331)$$

Lorentz-liikesyhtälö (247) voidaan kirjoittaa massatiheyden avulla muotoon

$$\zeta c \frac{du_k}{ds} = \rho F_{ki} u^i. \quad (332)$$

Tätä käyttäen saadaan

$$\frac{\partial T^{(m)}_i{}^k}{\partial x^k} = c \zeta \frac{du_i}{dt} = \rho F_{ik} u^k \frac{ds}{dt} = F_{ik} \rho \frac{\partial x^k}{\partial t} = F_{ik} j^k. \quad (333)$$

Kombinoimalla (324) toteamme että koko systeemin energia-liikemäärätensori (321) toteuttaa säilymislain (301). Tämä periaatteessa seuraa jo yleisestä teoriasta, mutta tässä haluttiin varmistua mm. siitä, että kenttäosuuden symmetrisoinnista (315) ei tullut mitään lisäongelmia.

Kirjoitetaan säilymislait vielä energialle ja liikemäärälle erikseen. Kentälle muistetaan (318)

$$T^{(k)00} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (334)$$

ja materiaalille (327)

$$T^{(m)00} = \zeta c^2 u^0 = \sum \mathbb{E}_{\text{kin}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \quad (335)$$

missä  $\mathbb{E}_{\text{kin}}$  on hiukkasen kineettinen energia (201). Integraalimuodossa (308) lausuttu säilymislaki saa muodon

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum \mathbb{E}_{\text{kin}} + \int dV \left( \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) \right] = - \oint d\mathbf{a} \cdot \mathbf{S}. \quad (336)$$

Vastaavasti saadaan liikemäärälle

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum \mathbf{p} + \int dV \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right]_{\beta} = - \oint da_{\alpha} \sigma_{\beta\alpha}, \quad (337)$$

missä  $\mathbf{p}$  on suhteellisuusteorian mukainen liikemäärä (161). Summauksissa tulee ottaa mukaan ne hiukkaset jotka ovat integrointitilavuuden  $V$  sisällä. Kun oletetaan että hiukkaset eivät kulje pinnan läpi koostuvat  $\mathbf{S}$  ja  $\sigma_{\beta\alpha}$  ainoastaan kentän osuuksista (319) ja (320).

Säilymislait (336)-(337) voi johtaa myös lähtien kolmi-vektorimuotoisista Maxwellin yhtälöistä (harjoitus).

Nyt on hyvä pysähtyä miettimään mitä on saavutettu. Muistellaan kun analyyttisen mekaniikan kurssin alussa johdettiin energian ja liikemäärän säilymislait hiukkasjoukolle. Siellä tutkimme potentiaalia  $V_{kl}(\mathbf{r})$  hiukkasten välillä ja saimme globaalit säilymislait

$$\sum_k T_k + \frac{1}{2} \sum_{k \neq l} V_{kl} = \text{vakio}, \quad \sum_k \mathbf{p}_k = \text{vakio}. \quad (338)$$

Vertaamme näitä juuri saatuihin säilymislakeihin (336)-(337). Uudet lait ovat sikäli rajoittuneempia, että ne koskevat vain sähkömagneettista vuorovaikutusta. Uudessa teoriassa olemme saavuttaneet seuraavat muutokset.

- Tulokset ovat täydellisesti yhtäpitäviä suhteellisuusteorian kanssa.
- Staattiset potentiaalit ovat korvautuneet dynaamisella kentällä.
- Kenttä vaikuttaa sekä energian että liikemäärän tiheyteen.
- Säilymislait ovat voimassa mielivaltaiselle tilavuudelle, ei ainoastaan globaalisesti.

### 7.3 Ajasta riippumaton kenttä

#### Coulombin laki

Tutkitaan sähkökenttää joka ei riipu ajasta. Maxwellin yhtälöt tässä tapauksessa ovat

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (339)$$

Kenttä voidaan ilmaista potentiaalin avulla

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (207)$$

Sijoittamalla ylempään Maxwellin yhtälöön saadaan *Poissonin yhtälö*

$$\Delta\varphi \equiv \nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (340)$$

Jos varaustiheys häviää, saadaan tästä *Laplacen yhtälö*

$$\Delta\varphi = 0. \quad (341)$$

Lasketaan pistevarauksen  $e$  muodostama kenttä. Symmetriasta seuraa että kentän pitää olla sädevektorin  $\mathbf{r}$  suuntainen.

Pallon yli integroitu Maxwellin yhtälö (292) antaa  $4\pi r^2 E(r) = e/\epsilon_0$ , josta saadaan *Coulombin laki*

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r}. \quad (342)$$

Usean varauksen aiheuttama potentiaali saadaan summana

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{e_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|}. \quad (343)$$

Sama integraalimuodossa

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (344)$$

#### Sähköstaattinen energia

Edellä johdettiin sähkökentän energia

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV E^2. \quad (345)$$

Käyttäen  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$  saadaan

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \int dV \mathbf{E} \cdot \nabla\varphi = -\frac{\epsilon_0}{2} \oint d\mathbf{a} \cdot \mathbf{E}\varphi + \frac{\epsilon_0}{2} \int dV \varphi \nabla \cdot \mathbf{E}. \quad (346)$$

Pintaintegraali häviää kun kun tilavuusintegrointi on koko avaruuden yli (olettaen että varaukset sijaitsevat rajoitetussa alueessa). Soveltamalla tilavuusintegraaliin Maxwellin yhtälöä saadaan

$$U = \frac{1}{2} \int dV \rho\varphi, \quad (347)$$

tai diskreeteille varauksille

$$U = \frac{1}{2} \sum_k e_k \varphi(\mathbf{r}_k). \quad (348)$$

Sijoittamalla potentiaali (343) saadaan

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \sum_l \frac{e_k e_l}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|}. \quad (349)$$

Suhteellisuusteoriasta seuraa että täysin jäykkää kappaletta ei voi olla sillä muuten signaalin etenemisnopeus ei olisi rajattu valon nopeuteen. Siksi klassisessa teoriassa alkeishiukkasia (joilla määritelmän mukaan ei ole sisäistä rakennetta) on pidettävä pistemäisenä. Nyt havaitaan energialausekkeesta (349) että pistemäisen varauksen energia on ääretön. Klassinen kenttäteoria ei ilmeisesti siis pysty ristiriidattomasti käsittelemään hyvin pieniä etäisyyksiä. Arvioidaan tämä etäisyys oletuksesta, että elektronin lepoenergia  $mc^2$  olisi samaa suuruusluokkaa kuin  $r_0$ -säteisen varatun pallon sähköstaattinen energia  $\sim e^2/(4\pi\epsilon_0 r_0)$ . Tätä sädettä

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} = 2 \cdot 10^{-15} \text{ m} \quad (350)$$

kutsutaan *elektronin klassiseksi säteeksi*. [Huom. kvanttimekaniikka tulee olennaiseksi jo suuremmalla etäisyydellä  $\hbar/(mc) = 4 \cdot 10^{-13} \text{ m}$ .]

Oletetaan jatkossa että jokin mekanismi stabiloi elektronin, ja tekee sen omasta kentästä aiheutuvan energian äärelliseksi vakioksi. Voimme sitten jättää tämä vakiotermin huomiotta, ja kirjoittaa varausten keskinäiselle energialle

$$U' = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \sum_{l \neq k} \frac{e_k e_l}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|}. \quad (351)$$

Nähdään siis että energian säilymislaissa (336) esiintyvä kentän energia (345) redusoituu analyttisessä mekaniikassa käsiteltyyn tapaukseen (338) staattisten (ja likimääräisesti myös hitaasti liikkuvien) varausten tapauksessa.

### Liike Coulombin kentässä (ei 05)

Analyttisen mekaniikan kurssissa käsiteltiin epärelativistisen hiukkasen liikettä keskeispotentiaalissa. Erityisesti tarkasteltiin Coulombin potentiaalia (342). Tehdään tässä sama lasku relativistiselle hiukkaselle.

Oletetaan keskuskappale niin raskaaksi, että sen liike voidaan unohtaa. Kyseessä on edelleen tasoliike, joten käytetään napakoordinaatistoa, jossa Lagrangen funktio (180)

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2}{c^2}} - \frac{\alpha}{r}. \quad (352)$$

Koska  $L$  ei riipu eksplisiittisesti  $\phi$ :tä eikä  $t$ :stä, saadaan liikevakioiksi kulmaliikemäärä

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{mr^2 \dot{\phi}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2}{c^2}}} \quad (353)$$

ja energia

$$\mathbb{H} = \dot{r}p_r + \dot{\phi}p_\phi - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2}{c^2}}} + \frac{\alpha}{r}. \quad (354)$$

Kuten epärelativistisessa tapauksessa, pyritään lausumaan  $\dot{r}$  ja  $\dot{\phi}$  liikevakioiden ja  $r$ :n avulla.

Nyt  $\dot{r}$ :n ja  $\dot{\phi}$ :n ratkaiseminen on algebrallisesti monimutkaisempaa kuin epärelativistisessa tapauksessa. Yksi vaihtoehto on ilmaista ensin  $\mathbb{H}$  oikeiden muuttujiensa funktiona

$$\mathbb{H} = c \sqrt{p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + m^2 c^2} + \frac{\alpha}{r}. \quad (355)$$

(Totea tämä varmuuden vuoksi vielä laskemalla.) Tästä voi myös ratkaista

$$p_r = \sqrt{\frac{1}{c^2} \left( \mathbb{H} - \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \frac{p_\phi^2}{r^2} - m^2 c^2}. \quad (356)$$

Toivotut muodot  $\dot{r}$ :lle ja  $\dot{\phi}$ :lle saadaan nyt käyttämällä Hamiltonin yhtälöitä

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial p_r} = \frac{cp_r}{\sqrt{p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + m^2 c^2}} \\ &= \frac{c^2 \sqrt{\frac{1}{c^2} \left( \mathbb{H} - \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \frac{p_\phi^2}{r^2} - m^2 c^2}}{\mathbb{H} - \frac{\alpha}{r}}, \\ \dot{\phi} &= \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial p_\phi} = \frac{cp_\phi}{r^2 \sqrt{p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + m^2 c^2}} \\ &= \frac{c^2 p_\phi}{r^2 \left( \mathbb{H} - \frac{\alpha}{r} \right)}. \end{aligned}$$

Radan yhtälöksi saadaan tutulla tavalla

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{r^2}{p_\phi} \sqrt{\frac{1}{c^2} \left( \mathbb{H} - \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \frac{p_\phi^2}{r^2} - m^2 c^2}, \quad (357)$$

mistä edelleen

$$\begin{aligned} \phi &= \int dr \frac{p_\phi}{r^2 \sqrt{\frac{1}{c^2} \left( \mathbb{H} - \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \frac{p_\phi^2}{r^2} - m^2 c^2}} \\ &= \int dr \frac{1}{r^2 \sqrt{\frac{1}{p_\phi^2} \left( \mathbb{H}^2 - m^2 c^2 \right) - \frac{2\alpha \mathbb{H}}{c^2 p_\phi^2} \frac{1}{r} - \left( 1 - \frac{\alpha}{c^2 p_\phi^2} \right) \frac{1}{r^2}}}. \end{aligned}$$

Epärelativistisessa teoriassa vastaava lauseke on

$$\phi = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{p_\phi^2} - \frac{2m\alpha}{p_\phi^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}}}. \quad (358)$$

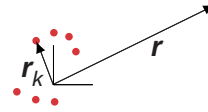
(Katso Analyttisen mekaniikan kurssi, saadaan myös edellisestä kaavasta rajatapauksena.) Huomionarvoista on että lausekkeet ovat täysin samanmuotoisia sitä lukuun ottamatta, että nyt neliöjuuressa myös  $1/r^2$  termillä on ykkösestä poikkeava kerroin. Tästä johtuu että rajoitetut radat ovat lähes ellipsejä mutta ne kiertyvät keskuskappaleen ympäri (harjoitus).

### Varausjoukon dipolimomentti (ei 05)

Varausjoukon synnyttämä potentiaali saadaan lausekkeesta

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{e_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|}. \quad (343)$$

Oletetaan että varaukset ovat jossain rajoitetussa alueessa, missä myös sijaitsee koordinaatiston origo.



Oletetaan että tarkastelupiste  $\mathbf{r}$  on kauempana niistä,  $r \gg r_k$ . Tällöin etäisyyden funktio voidaan kehittää sarjaksi

$$f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) = f(\mathbf{r}) - (\mathbf{r}_k \cdot \nabla) f(\mathbf{r}) + \dots \quad (359)$$

Soveltamalla kaavaan (343) saadaan

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\sum_k e_k}{r} - \sum_k e_k \mathbf{r}_k \cdot \nabla \frac{1}{r} \right). \quad (360)$$

Tässä summa

$$\mathbf{d} = \sum_k e_k \mathbf{r}_k \quad (361)$$

on *dipolimomentti*. Harjoitus: osoita että dipolimomentti on riippumaton origon valinnasta jos kokonaisvaraus  $\sum_k e_k = 0$ . Kokonaisvarauksen hävitessä saadaan *dipolipotentiaalille*

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{d} \cdot \nabla \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (362)$$

Sähkökentälle saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left( \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\nabla(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})}{r^3} + (\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}) \nabla \frac{1}{r^3} \right). \end{aligned} \quad (363)$$

Lopputulokseksi tulee

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{d}}{r^3} \quad (364)$$

Kehitelmää (360) voidaan jatkaa pitemmälle

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \dots \quad (365)$$

Termi  $\varphi^{(2)}$  on *kvadrupolipotentiali*

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_k e_k x_\alpha^{(k)} x_\beta^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \sum_k e_k \left( 3x_\alpha^{(k)} x_\beta^{(k)} - r_k^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Tässä jälkimmäinen muoto on seurausta siitä että  $\Delta r^{-1} = 0$  (kun  $r \neq 0$ ) joten lisätermillä ei ole vaikutusta summaan. Symmetristä jäljetöntä matriisia

$$D_{\alpha\beta} = \sum_k e_k \left( 3x_\alpha^{(k)} x_\beta^{(k)} - r_k^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (366)$$

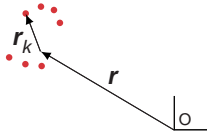
kutsutaan *kvadrupolimomentiksi*.

### Varaukset ulkoisessa sähkökentässä (ei 05)

Tutkitaan varauksia annetussa ulkoisessa potentiaalissa  $\varphi$ . Varauksen  $e_k$  ulkoiseen kenttään liittyvä energia (182) on

$$U = \sum_k e_k \varphi(\mathbf{r} + \mathbf{r}_k). \quad (367)$$

Oletamme että varaukset paikoissa  $\mathbf{r} + \mathbf{r}_k$  ovat keskittyneet ( $r_k$  pieni).



Kehitetään

$$U = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + \dots \quad (368)$$

missä

$$U^{(0)} = \varphi(\mathbf{r}) \sum_k e_k, \quad (369)$$

$$U^{(1)} = \nabla \varphi(\mathbf{r}) \cdot \sum_k e_k \mathbf{r}_k = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}. \quad (370)$$

Varausjakaumaan vaikuttava voima (199) on samaan tarkkuuteen

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \sum_k e_k \mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_k) \\ &= \sum_k e_k [\mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\mathbf{r}_k \cdot \nabla) \varphi \mathbf{E}(\mathbf{r})] \\ &= \left( \sum_k e_k \right) \mathbf{E} + (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (371)$$

Jos kokonaisvaraus häviää saadaan

$$\mathbf{F} = (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E}. \quad (372)$$

Varauksiin kohdistuva vääntömomentti nollassa kertaluvussa on

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \sum_k (\mathbf{r} + \mathbf{r}_k) \times e_k \mathbf{E} \\ &= \left( \sum_k e_k \right) \mathbf{r} \times \mathbf{E} + \mathbf{d} \times \mathbf{E} \end{aligned} \quad (373)$$

Jos kokonaisvaraus häviää saadaan

$$\mathbf{N} = \mathbf{d} \times \mathbf{E}. \quad (374)$$

Oletetaan että meillä on erillään kaksi varausjakautumaa joiden kummankin kokonaisvaraus häviää. Merkitään niiden dipolimomentteja  $\mathbf{d}_1$  ja  $\mathbf{d}_2$ . Niiden vuorovaikutus voidaan määrätä esim. laskemalla dipolin 2 energia dipolin 1 synnyttämässä kentässä,  $U = -\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{E}_1$ . Sijoittamalla (364) saadaan

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 - 3(\mathbf{d}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{d}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})}{r^3} \quad (375)$$

missä  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  on dipolien paikkavektorien erotus.

Seuraavassa kertaluvussa saadaan

$$\begin{aligned} U^{(2)} &= \frac{1}{2} \sum_k e_k x_\alpha^{(k)} x_\beta^{(k)} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \\ &= \frac{1}{6} \sum_k e_k \left( 3x_\alpha^{(k)} x_\beta^{(k)} - r_k^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \\ &= \frac{D_{\alpha\beta}}{6} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \end{aligned} \quad (376)$$

missä toinen rivi taas seuraa Laplace-yhtälöstä ja viimeinen kvadrupolimomentin määritelmästä (366).

### Staatinen magneettikenttä

Tarkastellaan varauksia jotka liikkuvat vain jollain rajoitetulla paikka- ja liikemäärävaruuden alueella. Tarkastellaan magneettikenttää keskiarvona ajan yli, joka on suurempi kuin tällaiseen liikkeeseen liittyvä periodi. Ottamalla keskiarvo Maxwellin yhtälöistä (259) ja (287) saadaan

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0. \quad (377)$$

$$\nabla \times \bar{\mathbf{B}} = \mu_0 \bar{\mathbf{j}}, \quad (378)$$

sillä rajoitetussa liikkeessä pitkällä aikavälillä  $\partial \bar{\mathbf{E}} / \partial t = 0$ . Vektoripotentiaalin avulla (198)

$$\bar{\mathbf{B}} = \nabla \times \bar{\mathbf{A}}, \quad (379)$$

jolloin

$$\nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{A}}) - \nabla^2 \bar{\mathbf{A}} = \mu_0 \bar{\mathbf{j}}. \quad (380)$$

Koska  $\mathbf{A}$  ei ole yksikäsitteisesti määrätty, voidaan vaatia lisäehto (*Coulombin mitta*)

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{A}} = 0, \quad (381)$$



jolloin saadaan

$$\Delta \bar{\mathbf{A}} = -\mu_0 \bar{\mathbf{j}}. \quad (382)$$

Tämä on samaa muotoa kuin Poissonin yhtälö (340), kullekkin komponentille erikseen.

Analogisesti sähköpotentiaalin kanssa (344) saamme sen ratkaisun

$$\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (383)$$

Tässä kohtaa on hyvä tarkastaa että  $\bar{\mathbf{A}}$  (383) todella toteuttaa mittaehdon (381) [harjoitus]. Diskreeteille varauksille  $\bar{\mathbf{A}}$  saadaan muotoon

$$\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k \left\langle \frac{e_k \mathbf{v}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|} \right\rangle, \quad (384)$$

missä aikakeskiarvoa on merkitty  $\langle \dots \rangle$ . Lausutaan magneettikenttä

$$\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = \nabla \times \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int dV' \frac{\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (385)$$

Käytetään kaavaa

$$\nabla \times (f\mathbf{a}) = (\nabla f) \times \mathbf{a} + f \nabla \times \mathbf{a}. \quad (386)$$

Koska  $\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}')$  ei riipu  $\mathbf{r}$ :stä saadaan

$$\nabla \mathbf{r} \times \left( \frac{\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \left( \nabla \mathbf{r} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}') \quad (387)$$

missä nablän alaindeksinä on ilmoitettu että se operoi vektoriin  $\mathbf{r}$ . Analogisesti Coulombin potentiaalin (342) kanssa

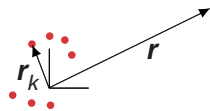
$$\nabla \mathbf{r} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (388)$$

Lopputulokseksi saadaan *Biot'n ja Savartin laki*

$$\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (389)$$

### Magneettinen momentti (ei 05)

Jatketaan stationaaristen virtausten synnyttämän kentän tarkastelua. Samoin kuin sähköiselle dipolille, rajoitutaan tarkastelemaan kenttää kaukana varauksista.



Sijoittamalla koordinaatiston origo varausten luo, voidaan olettaa  $r \gg r_k$ . Kaavasta

$$\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k \left\langle \frac{e_k \mathbf{v}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|} \right\rangle, \quad (384)$$

saadaan

$$\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{1}{r} \sum_k \langle e_k \mathbf{v}_k \rangle - \sum_k \langle e_k \mathbf{v}_k (\mathbf{r}_k \cdot \nabla) \frac{1}{r} \rangle \right). \quad (390)$$

Ensimmäinen termi häviää sillä

$$\sum_k \langle e_k \mathbf{v}_k \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \sum_k e_k \mathbf{r}_k \right\rangle = 0. \quad (391)$$

Laskemalla gradientti saadaan

$$\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \sum_k \langle e_k \mathbf{v}_k (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}) \rangle. \quad (392)$$

Kirjoitetaan

$$\begin{aligned} \sum_k \langle e_k \mathbf{v}_k (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{d}{dt} \sum_k e_k \mathbf{r}_k (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}) \right\rangle \\ &+ \frac{1}{2} \sum_k \langle e_k [\mathbf{v}_k (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}_k (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{r})] \rangle. \end{aligned} \quad (393)$$

Koska derivaattatermi taas häviää saadaan

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{2r^3} \sum_k \langle e_k [\mathbf{v}_k (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}_k (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{r})] \rangle \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{2r^3} \sum_k \langle e_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k) \times \mathbf{r} \rangle \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\bar{\mathbf{m}} \times \mathbf{r}}{r^3}, \end{aligned} \quad (394)$$

missä on määritelty *magneettinen momentti*

$$\bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{2} \sum_k e_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k. \quad (395)$$

Vektoripotentiaalista (394) voi laskea magneettisen dipolin magneettikentän (harjoitus)

$$\bar{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\bar{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{m}}}{r^3}, \quad (396)$$

joka on analoginen sähköisen dipolin sähkökentän (364) kanssa.

Oletetaan että varauksen  $e_k$  ja massan  $m_k$  suhde kaikilla hiukkasilla on sama. Tällöin

$$\bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{2} \sum_k e \mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k = \frac{e}{2m} \sum_k \mathbf{r}_k \times m \mathbf{v}_k. \quad (397)$$

Epärelativistisessä tapauksessa ( $v_k \ll c$ ) saadaan

$$\bar{\mathbf{m}} = \frac{e}{2m} \sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k = \frac{e}{2m} \mathbf{L}. \quad (398)$$

Siis magneettinen momentti on suoraan verrannollinen kulmaliikemäärään  $\mathbf{L}$ . Joissain tapauksissa voidaan yleisemmin kirjoittaa

$$\bar{\mathbf{m}} = \gamma \mathbf{L} \quad (399)$$

missä  $\gamma$  on *gyromagneettinen suhde*.

Tarkastellaan voimia jotka kohdistuvat stationaariseen virtajakautumaan tasaisessa ulkoisessa magneettikentässä ( $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{vakio}$ ). Voima (199) antaa

$$\bar{\mathbf{F}} = \sum_k \langle e_k \mathbf{v}_k \times \mathbf{B} \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \sum_k e_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{B} \right\rangle = 0. \quad (400)$$

Vääntömomentille saadaan

$$\bar{\mathbf{N}} = \sum_k \langle \mathbf{r}_k \times (e_k \mathbf{v}_k \times \mathbf{B}) \rangle. \quad (401)$$

Käyttäen samantapaisia temppuja kuin edellä saadaan

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{N}} &= \sum_k \langle e_k [\mathbf{v}_k (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{v}_k)] \rangle \\ &= \sum_k \langle e_k [\mathbf{v}_k (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} r_k^2] \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \langle e_k [\mathbf{v}_k (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{r}_k (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{B})] \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \langle e_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k) \times \mathbf{B} \rangle \\ &= \bar{\mathbf{m}} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (402)$$

analogisesti sähköisen dipolin (374) kanssa.

Oletetaan että hiukkassysteemi on heikossa magneetikentässä. Tällöin voidaan muodostaa aikakeskiarvo nopean liikkeen yli, mutta keskiarvot silti riippuvat hitaasti ajasta. Hiukkassysteemin kulmaliikemäärälle pätee (epärelativistinen tapaus)

$$\frac{d\bar{\mathbf{L}}}{dt} = \bar{\mathbf{N}} = \bar{\mathbf{m}} \times \mathbf{B} \quad (403)$$

Jos kaikilla hiukkasilla on sama massa-varaus-suhde saadaan

$$\frac{d\bar{\mathbf{L}}}{dt} = \frac{e}{2m} \bar{\mathbf{L}} \times \mathbf{B} \quad (404)$$

Tästä nähdään että  $\bar{\mathbf{L}}$  pyörii kulmataajuudella

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{e}{2m} \mathbf{B}, \quad (405)$$

mitä sanotaan *Larmor-taajuudeksi*, ja liikettä *Larmor-prekessioksi*.

## 7.4 Sähkömagneettiset yhtälöt jatkuvasa materiassa (ei 05)

Sovelletaan edellä johdettua sähkömagnetismin teoriaa atomeista muodostuvaan materiaan. Pyrimme muodostamaan yhtälöt jotka kuvaavat materiaan sähköisiä ilmiöitä mittakaavalla joka on suurempi kuin yhden atomin tai molekyylin koko.

Lähtökohtana ovat Maxwellin yhtälöt

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (288)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (289)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (290)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}. \quad (287)$$

Atomin sisällä esiintyy hyvin suuria sähkö- ja magneetikenttiä. Emme nyt ole kiinnostunut näistä, vaan muodostamme keskiarvon mittakaavalla joka on suurempi kuin

atomin mittakaava. Samaten otamme aikakeskiarvon yli atomin sisäisten liikkeiden. Koska Maxwellin yhtälöt ovat lineaarisia, eivät ne muutu keskiarvoistuksessa. Voimme siis käyttää niitä yllä olevassa muodossa olettaen että kaikki kentät, varaukset ja virrat ovat keskiarvoistettuja.

Varoitus: energian ja liikemäärän lausekkeet (336)-(337) ovat neliöllisiä kentissä, joten edellinen tulos ei päde niihin.

Tutkitaan erityisesti eristeitä, joissa varaukset eivät liiku atomilta tai molekyytiltä toiselle. Kuitenkin kun tällainen aine pannaan sähkökenttään, varaukset siirtyvät molekyylien sisällä. Tästä aiheutuu nollasta poikkeava varaustiheys  $\rho_p$  (myös keskiarvoistetulle varaukselle, kuten kohta nähdään). Indeksillä  $p$  tarkoitetaan ”polarisaatiota”. Kuitenkin kokonaisvaraus materiassa ei voi muuttua, joten

$$\int dV \rho_p = 0. \quad (406)$$

Väitetään että tällainen varaustiheys voidaan esittää divergenssinä jostain vektorikentästä

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (407)$$

Lisäksi määritellään että  $\mathbf{P}$  häviää materiaan ulkopuolella. Kenttää  $\mathbf{P}$  kutsutaan *sähköiseksi polarisaatioksi*.

Tarkastetaan ensin toteutuuko ehto (406). Yleisesti voidaan laskea

$$\int dV \rho_p = -\int dV \nabla \cdot \mathbf{P} = -\oint d\mathbf{a} \cdot \mathbf{P} \quad (408)$$

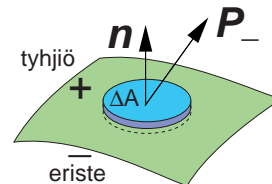
Kun integrointialue käsittää koko eristekappaleen, pintaintegraali häviää sillä  $\mathbf{P} = 0$  materiaan ulkopuolella. Nähdään siis että määritelmä (407) automaattisesti toteuttaa ehdon (406).

Kaava (407) antaa suoraan varaustiheyden eristeen sisällä. Sen lisäksi siitä voidaan päätellä eristeen pinnalla oleva pintavaraustiheys  $\sigma$ . Sovelletaan kaavaa (408) pienen pinnan alan  $\Delta A$  peittävään infinitesimaaliseen ohueen tilavuuselementtiin. Saadaan että varaustiheys pintaalaysikköä kohti

$$\sigma = \frac{1}{\Delta A} \int dV \rho_p = -\frac{1}{\Delta A} \oint d\mathbf{a} \cdot \mathbf{P} = -\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{P}_- - \mathbf{P}_+) \quad (409)$$

Tässä  $\mathbf{P}_-$  ja  $\mathbf{P}_+$  ovat polarisaatiot juuri eristeen pinnan sisä- ja ulkopuolella, ja  $\hat{\mathbf{n}}$  on pinnan ulkonormaali. Eristeen ulkopuolella määritelmän mukaan  $\mathbf{P}_+ = 0$ , joten

$$\sigma = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}_- \quad (410)$$



[Huom. Jos  $\mathbf{P}$  ajatellaan jatkuvaksi ja derivoituvaksi, on määritelmä (407) voimassa sellaisenaan. Jos sen sijaan sallitaan  $\mathbf{P}$ :n olla epäjatkuva, on epäjatkuvuuskohta tulkittava samoin kuin integraalissa (409).]

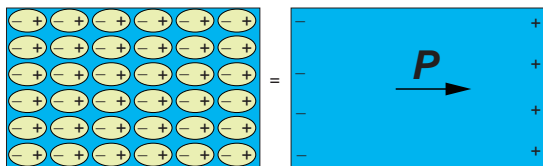


Lasketaan vielä koko eristekappaleen dipolimomentti

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \int dV \mathbf{r} \rho_p = - \int dV \mathbf{r} (\nabla \cdot \mathbf{P}) \\ &= - \oint (d\mathbf{a} \cdot \mathbf{P}) \mathbf{r} + \int dV (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \int dV \mathbf{P} \end{aligned}$$

Tämän perusteella voidaan polarisaatio  $\mathbf{P}$  tulkita dipolimomentin tiheydeksi.

Kuvasta nähdään että tasaisesti polarisoituneen aineen sisällä keskimääräinen varaus tiheys häviää, mutta pinnalle syntyy nollasta poikkeava polarisaatiovaraus.



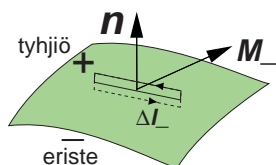
Eristeessä voi olla myös virtoja  $\mathbf{j}_m$ , jotka aiheutuvat virroista kunkin molekyylin sisällä. Näiden virtojen täytyy toteuttaa jatkuvuusyhtälö (293). Koska virrat ovat molekylaarisia, on niiden aikaskaala hyvin lyhyt verrattuna nyt tarkasteltavaan makroskooppiseen skaalaan. Ajan yli keskiarvoistettaessa jatkuvuusyhtälön aikaderivaattatermi on merkityksetön joten

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_m = 0. \quad (411)$$

Väitetään että tämän takia  $\mathbf{j}_m$  on esitettävissä muodossa

$$\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (412)$$

[Vert.  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Vähintäänkin todetaan että jatkuvuusehto (411) seuraa automaattisesti esityksestä (412).] Tässä esiintyvää vektorikenttää  $\mathbf{M}$  kutsutaan *magnetisaatioksi*. Sen oletetaan häviävän eristeen ulkopuolella.



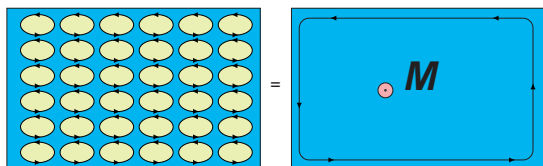
Kaava (412) antaa suoraan virrantiheyden eristeen sisällä. Sen lisäksi saadaan eristeen pinnalla kulkeva virta  $\mathbf{j}_m^{\text{surf}}$  kun lasketaan

$$\int d\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}_m = \int d\mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{M} = \oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{M} = \Delta \mathbf{l} \cdot (\mathbf{M}_- - \mathbf{M}_+). \quad (413)$$

Koska  $\mathbf{M} \neq 0$  vain eristeessä saadaan

$$\mathbf{j}_m^{\text{surf}} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{M}_- \quad (414)$$

Kuvasta nähdään että tasaisesti magnetisoituneen aineen sisällä keskimääräinen virta häviää, mutta pinnalle syntyy nollasta poikkeava virta.



Lasketaan vielä koko eristekappaleen magneettinen momentti (395)

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{1}{2} \int dV \mathbf{r} \times \mathbf{j}_m = \frac{1}{2} \int dV \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{M}) \\ &= \frac{1}{2} \oint \mathbf{r} \times (d\mathbf{a} \times \mathbf{M}) - \frac{1}{2} \int dV (\mathbf{M} \times \nabla) \times \mathbf{r} \\ &= -\frac{1}{2} \int dV [\nabla (\mathbf{M}_c \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{M} (\nabla \cdot \mathbf{r})] = \int dV \mathbf{M} \end{aligned}$$

Tässä alaindeksi  $c$  tarkoittaa että suure on pidettävä vakiona derivoinnissa. Tämän perusteella voidaan magnetisaatio  $\mathbf{M}$  tulkita magneettisen momentin tiheydeksi.

Oletetaan että polarisaatiovarausten lisäksi on olemassa myös muita ns. "vapaita" varauksia. Merkitään näiden varaus tiheyttä  $\rho_f$ :llä (free). Kokonaisvaraus on siis

$$\rho = \rho_f + \rho_p = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (415)$$

Vastaavasti meillä voi magnetisaatiovirran  $\mathbf{j}_m$  ohella olla johtimissa liikkuvia vapaita virtoja  $\mathbf{j}_f$ . Lisäksi virtaa syntyy kun polarisaatio muuttuu ajassa. Sovelletaan nimittäin jatkuvuusyhtälöä polarisaatiovaraukseen

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_p = -\frac{\partial \rho_p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (416)$$

mistä päätellään että kokonaisvirta on

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (417)$$

Maxwellin yhtälöt tulevat siis muotoon

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}), \quad (288)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (289)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (290)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \left( \mathbf{j}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right). \quad (287)$$

Sen sijaan että kirjoitettaisiin näin, määritellään kaksi uutta kenttää

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (418)$$

$$\mathbf{H} \equiv \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}. \quad (419)$$

On helppo nähdä että näiden avulla Maxwellin yhtälöt ovat

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_f. \end{aligned} \quad (420)$$

Nämä yhtälöt näyttävät lähes yhtä yksinkertaisilta (ellei jopa yksinkertaisemmilta) kuin alkuperäiset Maxwellin yhtälöt (287)-(290). On kuitenkin muistettava, että koska

niissä esiintyy 2 kpl kolmivektoreita enemmän ( $\mathbf{D}$  ja  $\mathbf{H}$ ), on niitä ratkaistaessa oltava lisäksi 2 kpl kolmivektorirelaatioita enemmän. Kaikkein yksinkertaisimmassa tapauksessa tällaiset relaatiot ovat lineaarisia riippuvuuksia

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (421)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}, \quad (422)$$

missä  $\epsilon$  ja  $\mu$  ovat jotain vakioita. (Huom. tyhjiössä  $\mathbf{P} = \mathbf{M} = 0$  joten  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  ja  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ .) Usein on voimassa jokin yleisempi relaatio

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{E}) &\Leftrightarrow \mathbf{P}(\mathbf{E}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{B}) &\Leftrightarrow \mathbf{B}(\mathbf{H}) \Leftrightarrow \mathbf{M}(\mathbf{H}) \end{aligned} \quad (423)$$

jotka voidaan ilmaista usealla eri tavalla käyttäen relaatioita (418) ja (419). Nämäkään eivät välttämättä riitä: esim. ferromagneettisissa aineissa  $\mathbf{M}$  voi saada (historiasta riippuen) hyvin eri arvoja vaikka  $\mathbf{H} = 0$ .

Materiaalirelaatioiden (421)-(423) teoreettinen laskeminen kuuluu *kiinteä olomuodon fysiikan* piiriin. (Joskus mielenkiinnon kohteena ovat myös nesteiden ja kaasujen magneettiset ominaisuudet.) Kvanttimekaniikka on useimmiten olennaisessa osassa tällaisissa laskuissa. Vaihtoehtoisesti, voidaan Maxwellin yhtälöitä soveltaa käyttäen kokeellisesti mitattuja relaatiota (421)-(423).

### Esimerkki

Tarkastellaan eristekappaletta ulkoisessa ajasta riippumattomassa sähkökentässä  $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \hat{z}$ . Maxwellin yhtälöt (420) redusoituvat muotoon

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (424)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (425)$$

Eristeessä oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi lineaarinen materiaalirelaatio (421):

$$\mathbf{D} = \begin{cases} \epsilon \mathbf{E} & \text{eristessä} \\ \epsilon_0 \mathbf{E} & \text{eristeen ulkopuolella} \end{cases} \quad (426)$$

Reunaehdoiksi rajapinnalla saadaan relaatiosta (424) että  $\mathbf{D}$ :n normaalikomponentti on jatkuva. [Päätely on samanlainen kuin kaavassa (409).] Relaatiosta (425) saadaan että  $\mathbf{E}$ :n tangentialikomponentti on jatkuva. [Päätely on samanlainen kuin kaavassa (413).]

1) Ulkoisen kentän suuntainen pitkä sylinteri. Symmetriasta seuraa että  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{D}$  ovat  $z$ -akselin suuntaisia.  $\mathbf{E}$ :n tangentialikomponentin jatkuvuudesta seuraa että  $\mathbf{E} = E_0 \hat{z}$  kaikkialla.  $\mathbf{D}$  saadaan suoraan kaavasta (426).

2) Kenttää vastaan kohtisuora eristelevy. Symmetriasta seuraa taas että  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{D}$  ovat  $z$ -akselin suuntaisia.  $\mathbf{D}$ :n normaalikomponentin jatkuvuudesta seuraa että  $\mathbf{D}$  on vakio kaikkialla. Reunaehdosta äärettömyydessä saadaan  $\mathbf{D} = \epsilon_0 E_0 \hat{z}$ . Eristeessä siis

$$\mathbf{E} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E_0 \hat{z}. \quad (427)$$

Koska  $\epsilon > \epsilon_0$  (miksi?) on sähkökenttä pienentynyt eristeen sisässä. (Vert. edellinen tapaus.)

3) Eristepallo. Sekä pallon sisä- että ulkopuolella skalari-potentiaali toteuttaa Laplacen yhtälön (341). Pallokoordinaateissa lausuttuna

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0. \end{aligned}$$

Etsitään separoituvia ratkaisuja

$$\varphi = R(r)Y(\theta, \phi). \quad (428)$$

Tässä  $Y(\theta, \phi)$  on palloharmoninen funktio, joka toteuttaa yhtälön

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + n(n+1)Y = 0.$$

Tässä tapauksessa riittää tutkia ratkaisuja  $Y(\theta, \phi)$  jotka eivät riipu kulmasta  $\phi$ . Ratkaisut ovat silloin Legendren polynomeja  $P_n(\cos \theta)$ . Alimmissa kertaluvuissa ( $\mu = \cos \theta$ )

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu, \quad P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1), \dots \quad (429)$$

Legendren polynomit ovat ortogonaalisia,

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu = \delta_{nm} \frac{2}{2n+1}. \quad (430)$$

Muita hyödyllisiä ominaisuuksia löytyy taulukkokirjoista (esim. Abramowitz-Stegun tai Gradshteyn-Ryzhik) tai matemaattisista ohjelmistoista (esim. Mathematica).

Radiaaliosa toteuttaa yhtälön

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - n(n+1)R = 0$$

jonka ratkaisu on

$$R(r) = A_n r^n + B_n r^{-n-1}. \quad (431)$$

Yleinen ratkaisu voidaan kummassakin alueessa esittää summana ratkaisuista (428). Äärettömyydessä on reunaehdona

$$\varphi_\infty = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta = -E_0 r P_1(\mu). \quad (432)$$

Vaatiin että ratkaisut ovat äärellisiä voidaan ratkaisut  $\varphi_1$  sisä- ja  $\varphi_2$  ulkopuolella kirjoittaa

$$\varphi_1 = \sum A_n r^n P_n(\mu) \quad (433)$$

$$\varphi_2 = \sum B_n r^{-n-1} P_n(\mu) - E_0 r P_1(\mu). \quad (434)$$

$\mathbf{E}$ :n tangentialikomponentin jatkuvuudesta saadaan että pallon pinnalla  $\varphi_1 = \varphi_2 + \text{vakio}$ .  $\mathbf{D}$ :n normaalikomponentin jatkuvuudesta saadaan [käyttäen (426)]

$$\epsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}. \quad (435)$$

Käyttäen Legendren polynomien lineaarista riippumattomuutta (harjoitus) saadaan että vain kaksi kerrointa on nollasta poikkeavia

$$A_1 = -\frac{3E_0}{\kappa + 2}, \quad B_1 = \frac{(\kappa - 1)E_0 a^3}{\kappa + 2} \quad (436)$$

missä  $\kappa = \epsilon/\epsilon_0$  ja  $a$  on pallon säde. Saadaan siis että sähkökenttä pallon sisällä on vakio

$$E_z = \frac{3\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0 \quad (437)$$

ja siis tekijällä  $3\epsilon_0/(\epsilon + 2\epsilon_0)$  pienempi kuin  $E_0$ .

Tämä esimerkki oli poikkeuksellisen yksinkertainen, koska kaikissa tapauksissa ratkaisu voitiin esittää tuttujen alkeisfunktioiden avulla. Lisäksi kenttä oli vakio näytteen sisässä. Monimutkaisemmat kappaleen muodot johtavat huomattavasti vaikeampiin laskuihin, joissa sarjat useimmiten ovat päättymättömiä, eikä kenttä ole vakio kappaleen sisällä. Monissa tapauksissa on turvauduttava aiemmin kurssissa kuvattuihin numeerisiin ratkaisumenetelmiin.

## 8. Sähkömagneettiset aallot

### 8.1 Aallot tyhjiössä

Tarkastellaan sähkömagneettista kenttää tyhjiössä, missä  $\rho = \mathbf{j} = 0$ . Maxwellin yhtälöt (287)-(290) saavat muodon

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (438)$$

Tarkoituksena on osoittaa että tällä homogeenisella yhtälöryhmällä on nollasta poikkeavia ajasta riippuvia ratkaisuja. Huomataan että edellä konstruointiin eksplisiittisesti ajasta riippumattomat ratkaisut Coulombin (344) ja Biot'n ja Savartin (389) laeilla. Nämä ratkaisut ovat suoraan verrannollisia varauksiin ja virtoihin, joten ne häviävät tyhjiössä.

Esitetään kentät potentiaalien avulla. Mittamuunnoksella (206) osoitettiin että aina voidaan valita että skalaari-potentiaali  $\varphi = 0$ . Kirjoitetaan siis

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (439)$$

Sijoittamalla  $\nabla \cdot \mathbf{E}$ :n yhtälöön saadaan

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (440)$$

Nähdään siis että  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  on ajasta riippumaton. Nähdään että voidaan tehdä vielä toinen mittamuunnos (206) jossa  $\nabla^2 f = -\nabla \cdot \mathbf{A}$ . Tämä muunnoksen jälkeen sekä  $\varphi = 0$  että

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (441)$$

Sijoittamalla  $\nabla \times \mathbf{B}$ :n yhtälöön saadaan

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \quad (442)$$

Käyttämällä (441) saadaan aaltoyhtälö

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (443)$$

Operoimalla tähän  $\partial/\partial t$  tai  $\nabla \times$ :llä nähdään että sekä  $\mathbf{E}$  että  $\mathbf{B}$  toteuttavat saman aaltoyhtälön.

Aaltoyhtälö (443) voidaan johtaa myös nelivektoreilla. Tyhjiössä (284) antaa

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = 0. \quad (444)$$

Kombinoimalla tämä kenttätensoren esitykseen

$$F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^k} \quad (246)$$

saadaan

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0. \quad (445)$$

Tämä redusoituu aaltoyhtälöön (443) kun vaaditaan *Lorenz-ehto*

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0 \iff \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (446)$$

Nähdään että Lorenz-ehto toteutuu automaattisesti, koska edellä sekä  $\varphi = 0$  että  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Lorenz-ehto on siitä hyvä että se on koordinaatistoriippumaton, kun taas kaksi erillistä ehtoa ovat koordinaatistoriippuvia.

Kuten jo aiemmin aaltoyhtälön yhteydessä mainittiin, voidaan aaltoyhtälön (443) vakio  $1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  identifioida aallon nopeuden kanssa. SI-järjestelmässä  $\mu_0$  on sovittu vakio, joka kiinnittää virran perusyksikön Ampeerin ja sitä kautta varauksen yksikön Coulombin. (Ampeeri määritellään voimana kahden johtimen välillä, teoriassa siis Lorentzin voiman ja Biot-Savart-lain kautta.) Kun sähköyksiköt on kiinnitetty, voidaan  $\epsilon_0$  mitata mm. mittaamalla voimaa kahden varauksen välillä. Näin saatua  $\epsilon_0$ :aa voidaan käyttää ennustamaan sähkömagneettisen aallon nopeutta, ja varsin hyvällä tarkkuudella saadaan sama kuin mitattu valon nopeus. Kuitenkin valon nopeus voidaan mitata tarkemmin kuin  $\epsilon_0$  suoraan. Siksi SI-järjestelmässä on päädytty määrittelemään  $\epsilon_0$  valon nopeuden avulla  $\epsilon_0 \equiv 1/(c^2 \mu_0)$ . Silloin valon nopeus on määritelmän mukaan täsmälleen

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad (447)$$

ja kokeellisesti testattavaksi suureeksi jää mm. verrannollisuuskerroin Coulombin laissa.

Mainittakoon että SI-järjestelmässä pituus on määritely käyttäen aikaa ja valon nopeutta. Näin ollen valon nopeudenkin arvo on vain määritelmä,  $c = 299792458$  m/s täsmälleen.

### Tasoaalto (ei 05)

Tutkitaan aaltoja jossa paikkariippuvuus on vain yhteen suuntaan. Valitaan tämän suuntainen akseli  $x$ :ksi. Aaltoyhtälö saa muodon

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad (448)$$

missä  $f$  on mikä tahansa  $\mathbf{E}$ :n,  $\mathbf{B}$ :n tai  $\mathbf{A}$ :n komponentti. Se voidaan myös kirjoittaa

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) f = 0. \quad (449)$$

Määritellään koordinaatit

$$\xi = t - \frac{x}{c}, \quad \eta = t + \frac{x}{c} \iff t = \frac{1}{2}(\eta + \xi), \quad x = \frac{c}{2}(\eta - \xi) \quad (450)$$

jolloin

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (451)$$

Aaltoyhtälö saa muodon

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (452)$$

Tästä saadaan yleinen ratkaisu  $f = f_1(\xi) + f_2(\eta)$ , missä funktiot  $f_1(\xi)$  ja  $f_2(\eta)$  ovat mielivaltaisia. Siis

$$f(t, x) = f_1 \left( t - \frac{x}{c} \right) + f_2 \left( t + \frac{x}{c} \right). \quad (453)$$

Tässä ensimmäinen termi liikkuu nopeudella  $c$  positiiviseen  $x$  suuntaan ja toinen termi samalla nopeudella  $-x$  suuntaan.

Tasoaallolle mittaehto (441) on  $dA_x/dx = 0$ . Tästä seuraa että  $A_x$  ja edelleen  $E_x$  (439) on  $x$ :tä riippumattomia. Tämä vakiokenttä on täysin riippumaton aallosta, joten oletetaan sen yksinkertaisuuden vuoksi häviävän.

Tutkitaan aaltoa joka etenee positiiviseen  $x$  suuntaan:

$$\mathbf{A}(t, x) = \mathbf{A}(\xi) = \mathbf{A} \left( t - \frac{x}{c} \right). \quad (454)$$

Lasketaan  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{B}$  (439):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{d\mathbf{A}}{d\xi} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{d\mathbf{A}}{d\xi} \times \nabla \left( t - \frac{x}{c} \right) = -\frac{1}{c} \hat{\mathbf{x}} \times \frac{d\mathbf{A}}{d\xi}. \end{aligned}$$

Tästä saadaan

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}, \quad (455)$$

missä aallon etenemissuuntaa on merkitty  $\hat{\mathbf{n}}$ :llä. Nähdään että sekä  $\mathbf{E}$  että  $\mathbf{B}$  ovat kohtisuorassa aallon etenemissuuntaa vastaan ja siksi sanotaan että sähkömagneettiset aallot ovat *poikittaisia*. Vektorit  $\hat{\mathbf{n}}$ ,  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{B}$  ovat kaikki kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Lasketaan energiatiheys (318)

$$\mathcal{H} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2. \quad (318)$$

Käyttäen (455) havaitaan että sähkökenttään ja magneetikenttään liittyvät energiatiheydet ovat yhtä suuret, ja yhteensä

$$\mathcal{H} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \epsilon_0 E^2. \quad (456)$$

Energiavirrantiheydelle (319) saadaan

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{E} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) = c\epsilon_0 E^2 \hat{\mathbf{n}} \quad (457)$$

koska  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} = 0$ . Vertaamalla tätä energiatiheyteen, toteamme että energia liikkuu nopeudella  $c$ , kuten luonnollista onkin.

Kaavasta (337) [tai kaavoista (304) ja (310)] saadaan että liikemäärän tiheys

$$\frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \frac{\epsilon_0 E^2}{c} \hat{\mathbf{n}}. \quad (458)$$

Huomaa että liikemäärän ja energian suhde on sama kuin lepomassattomalla hiukkasella (166):  $p = \mathbb{E}/c$ .

Maxwellin painetensorin (320) kaikki muut komponentit häviävät (harjoitus) paitsi

$$\sigma_{xx} = \epsilon_0 E^2. \quad (459)$$

Tämä on sopusoinnussa sen kanssa että liikemäärätiheys (458) virtaa nopeudella  $c$  suuntaan  $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{n}}$ .

### Monokromaattinen tasoaalto (ei 05)

Tärkeä erikoistapaus tasoaallosta on monokromaattinen tasoaalto

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (460)$$

Tässä oletetaan että vain reaaliosa on fysikaalisesti merkityksellinen. Sijoittamalla tämä aaltoyhtälöön (443) saadaan aallolle dispersiorelaatio  $\omega(\mathbf{k})$ :

$$\omega = ck, \quad (461)$$

joka on lineaarinen. [Kuten kaavan (15) yhteydessä, toinen juuri  $\omega = -ck$  ei johda uuteen ratkaisuun.] Mittaehdosta (441) saadaan että  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_0 = 0$ , siis  $\mathbf{A}_0$  on kohtisuorassa aallon etenemissuuntaan  $\mathbf{k}$  nähden. Sähkö ja magneettikentille saadaan

$$\mathbf{E} = ick\mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}. \quad (462)$$

Tarkastellaan esimerkiksi tapausta  $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{x}}$ , ja

$$\mathbf{A}_0 = A^y e^{-i\phi_y} \hat{\mathbf{y}} + A^z e^{-i\phi_z} \hat{\mathbf{z}}. \quad (463)$$

Ottaen reaaliosat saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A^y \hat{\mathbf{y}} \cos(kx - \omega t - \phi_y) + A^z \hat{\mathbf{z}} \cos(kx - \omega t - \phi_z) \\ \mathbf{E} &= -A^y ck \hat{\mathbf{y}} \sin(kx - \omega t - \phi_y) - A^z ck \hat{\mathbf{z}} \sin(kx - \omega t - \phi_z) \\ \mathbf{B} &= -A^y k \hat{\mathbf{z}} \sin(kx - \omega t - \phi_y) + A^z k \hat{\mathbf{y}} \sin(kx - \omega t - \phi_z). \end{aligned} \quad (464)$$

### Staattisen kentän Fourier-muunnos

Pyritään yleisesti esittämään sähkömagneettinen kenttä Fourier-sarjana. Kerrataan ensin Fourier-muunnos kolmiulotteisessa avaruudessa

$$f_{\mathbf{k}} = \int d^3x f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (465)$$

Tässä integrointi on helpoin ajatella suorakulmisen särmiön yli, jonka mitat ovat  $L_x$ ,  $L_y$  ja  $L_z$ . Periodisilla reunaehdoilla sallitut aaltovektorin arvot ovat  $(n_x, n_y$  ja  $n_z$  kokonaislukuja)

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L_x}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L_y}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L_z}. \quad (466)$$

Fourier-muunnoksen käänteismuunnos on (totea laskemalla)

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (467)$$

missä  $V = L_x L_y L_z$ . Rajalla  $L_x, L_y$  ja  $L_z \rightarrow \infty$  tämä saa muodon

$$f(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (468)$$

Tarkastellaan ensin varausten synnyttämää staattista kenttää. Edellä ratkaistiin Poissonin yhtälö kaavalla (343). Toistetaan ratkaisu käyttäen Fourier-muunnosta. Yhden pistevarauksen tapauksessa Poissonin yhtälö on

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \delta^3(\mathbf{r}). \quad (469)$$

Soveltamalla Fourier-muunnosta tähän kaavaan saadaan

$$-k^2 \varphi_{\mathbf{k}} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (470)$$

mistä saadaan

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{\rho}{\epsilon_0 k^2}. \quad (471)$$

Sähkökentälle (207) saadaan

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k} \varphi_{\mathbf{k}} = -i \frac{e\mathbf{k}}{\epsilon_0 k^2}. \quad (472)$$

Havaitaan että  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$  on aaltovektorin suuntainen. Tästä syystä Coulombin kenttää kutsutaan pitkittäiseksi.

### Kentän värähtelyt (ei 05)

Palataan käsittelemään kentän dynamiikkaa, kun varauksia ei ole paikalla. Oletetaan mittaehdot  $\varphi = \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Kullakin ajanhetkellä vektoripotentiaali voidaan kehittää Fourier-sarjaksi paikan suhteen. Valitaan tässä  $t = 0$ . Vektoripotentiaalin reaalisuus taataan automaattisesti kun kirjoitetaan Fourier-sarja muotoon

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t=0, \mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=1,2} \left[ a_{\mathbf{k},\alpha}(0) \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}(\mathbf{r}) \right. \\ &\quad \left. + a_{\mathbf{k},\alpha}^*(0) \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}^*(\mathbf{r}) \right], \end{aligned} \quad (473)$$

missä

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha)} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (474)$$

Tässä reaaliset yksikkövektorit  $\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha)}$  esittävät aallon polarisaatiota. Transversaalisuusehdon takia ne riippuvat aaltovektorista  $\mathbf{k}$ , ja voidaan valita että vektorit  $\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}$  ja  $\hat{\mathbf{k}}$  ovat oikeakätisesti järjestetyt ortonormaalit kantavektorit.

Jotta saataisiin  $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$  yleisellä ajanhetkellä meidän on korvattava  $a_{\mathbf{k},\alpha}(0)$  ajasta riippuvalla funktiolla.

Sijoittamalla aaltoyhtälöön todetaan (samoin kuin yksittäisen aallon tapauksessa) että

$$a_{\mathbf{k},\alpha}(t) = a_{\mathbf{k},\alpha}(0) e^{-i\omega t}, \quad (475)$$

missä  $\omega = ck$ . Näin ollen yleinen tapaus voidaan kirjoittaa muodoissa

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=1,2} \left[ a_{\mathbf{k},\alpha}(t) \epsilon^{(\alpha)} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \right. \\ &\quad \left. + a_{\mathbf{k},\alpha}^*(t) \epsilon^{(\alpha)} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=1,2} \left[ a_{\mathbf{k},\alpha}(0) \epsilon^{(\alpha)} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \right. \\ &\quad \left. + a_{\mathbf{k},\alpha}^*(0) \epsilon^{(\alpha)} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) \right]. \end{aligned} \quad (476)$$

Lasketaan Hamiltonin funktio (318)

$$\begin{aligned} H &= \int dV \left( \frac{\epsilon_0}{2} E^2 - \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int dV \left[ \dot{\mathbf{A}}^2 + c^2 (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right]. \end{aligned} \quad (477)$$

Väitämme nyt että kun kehitemmä (476) sijoitetaan tähän saadaan

$$H = 2\epsilon_0 \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} c^2 k^2 a_{\mathbf{k},\alpha}^* a_{\mathbf{k},\alpha}. \quad (478)$$

Lasku suoraan tehtynä on varsin pitkällinen. Tässä muutamia hyödyllisiä välivaiheita. Ensimmäisessä vaiheessa kannattaa sijoittaa Hamiltonin funktioon

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (479)$$

Käyttämällä reaalisuusehtoa

$$\mathbf{A}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^* \quad (480)$$

ja eri Fourier-komponenttien ortogonaalisuutta saadaan

$$\begin{aligned} H &= \frac{\epsilon_0}{2} V \sum_{\mathbf{k}} \left[ \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^* + c^2 (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*) \right] \\ &= \frac{V\epsilon_0}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left[ \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^* + c^2 k^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^* \right], \end{aligned} \quad (481)$$

missä jälkimmäisessä muodossa on käytetty  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 0$ . Toisessa vaiheessa huomataan että

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\alpha} \left[ a_{\mathbf{k},\alpha}(t) \epsilon^{(\alpha)} + a_{-\mathbf{k},\alpha}^*(t) \epsilon^{(\alpha)} \right], \quad (482)$$

jolloin

$$\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} = \frac{-ick}{\sqrt{V}} \sum_{\alpha} \left[ a_{\mathbf{k},\alpha}(t) \epsilon^{(\alpha)} - a_{-\mathbf{k},\alpha}^*(t) \epsilon^{(\alpha)} \right]. \quad (483)$$

Sijoittamalla nämä saadaan erinäisten kumoutumisten jälkeen väite (478).

Saatu Hamiltonin funktio

$$H = 2\epsilon_0 \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} c^2 k^2 a_{\mathbf{k},\alpha}^* a_{\mathbf{k},\alpha} \quad (478)$$

voidaan esittää kanonisten muuttujien funktiona kun määritellään

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{k},\alpha} &= \sqrt{\epsilon_0} (a_{\mathbf{k},\alpha} + a_{\mathbf{k},\alpha}^*) \\ P_{\mathbf{k},\alpha} &= -ick \sqrt{\epsilon_0} (a_{\mathbf{k},\alpha} - a_{\mathbf{k},\alpha}^*). \end{aligned} \quad (484)$$

Näillä saadaan Hamiltonin funktio muotoon

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} \left( P_{\mathbf{k},\alpha}^2 + c^2 k^2 Q_{\mathbf{k},\alpha}^2 \right). \quad (485)$$

Tämä on pienten värähtelyjen Hamiltonin funktio lausutuna normaalikoordinaateissa. Varmuuden vuoksi kannattaa vielä tarkistaa että Hamiltonin liikeyhtälöt

$$\frac{\partial H}{\partial Q_{\mathbf{k},\alpha}} = -\dot{P}_{\mathbf{k},\alpha}, \quad \frac{\partial H}{\partial P_{\mathbf{k},\alpha}} = +\dot{Q}_{\mathbf{k},\alpha} \quad (486)$$

toteutuvat sillä muuttujia ei johdettu Lagrangen funktiosta lähtien.

Nähdään siis että sähkömagneettiset aallot voidaan tulkitella kentän harmonisiksi värähtelyiksi. Jokainen Fourier-komponentti ja polarisaatiosuunta värähtelee muista riippumatta.

## 8.2 Liikkuvien varausten kenttä

Täysin yleisessä tapauksessa (siis varaukset paikalla ja ei mitään mittavalintaa) voidaan sähkömagneettisen kentän potentiaaleille kirjoittaa yhtälöt

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) &= -\mu_0 \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (487)$$

[Nämä on helppo johtaa joko kolmi- tai nelivektorimuotoisista Maxwellin yhtälöistä samaan tapaan kuin varauksettomassa tapauksessa (443).] Jos vaaditaan lisäksi Lorenzehto (446) saadaan nämä muotoon

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (488)$$

Siis myös ajasta riippuvassa tapauksessa  $\mathbf{A}$  ja  $\varphi$  toteuttavat saman muotoisen yhtälön, vain oikean puolen epähomogeenisuustermi on eri. [vert. (340) ja (382)].

Tutkitaan yleisemmin yhtälöä

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -f(\mathbf{r}, t). \quad (489)$$



Tämä ongelma voidaan ratkaista kahdessa osassa. Ensin ratkaistaan *Greenin funktio*  $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$  yhtälöstä

$$\left(\nabla_{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t'). \quad (490)$$

Tämän lisäksi on vaadittavat tietyt reunaehdot, jotta  $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$  olisi täysin määrätty. Yleinen ratkaisu yhtälölle (489) on silloin

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int d^3V' \int dt' G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}', t'). \quad (491)$$

On helppo osoittaa että kaavan (491) antama  $\psi$  toteuttaa alkuperäisen yhtälön (489).

Huomataan että siinä tapauksessa että kaikki aikariippuvat tekijät jätetään pois, tätä on jo käytetty edellä: Greenin funktio antaa oleellisesti yhden varauksen Coulombin potentiaalin (342), ja varausjoukon potentiaali saadaan sen integraalina (344).

Pyritään ratkaisemaan Greenin funktio yhtälöstä (490). Ensiksi huomataan että Greenin funktio riippuu vain koordinaattien erotuksista

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t'), \quad (492)$$

joten riittää ratkaista funktio  $G(\mathbf{r}; t)$ . Toiseksi, se ei voi riippua  $\mathbf{r}$ :n suunnasta. Ilmaisemalla Laplace-operaattoria pallokoordinaateissa (428) saadaan origon ulkopuolella yhtälö

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0. \quad (493)$$

Kirjoittamalla

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{\chi(r, t)}{r} \quad (494)$$

saadaan

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0. \quad (495)$$

Tämän yhtälön yleinen ratkaisu johdettiin edellä tasoaalloon (453) yhteydessä:

$$\chi(r, t) = f_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{c}\right). \quad (496)$$

Otetaan mukaan vain termi, joka kuvaa origosta pois päin etenevää aaltoa. Näin saatavaa Greenin funktiota kutsutaan *viivästymeeksi* eli *retardoiduksi*. Siis

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{\chi(t - r/c)}{r}. \quad (497)$$

Funktio  $\chi$  on lopuksi määrättävä alkuehdosta origossa:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\mathbf{r}, t) = -\delta^3(\mathbf{r})\delta(t). \quad (498)$$

Integroidaan tämä origokeskeisen  $\varepsilon$ -säteisen pallon yli, jolloin saadaan

$$\oint d\mathbf{a} \cdot \nabla G - \frac{1}{c^2} \int dV \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\delta(t). \quad (499)$$

Laskemalla eteenpäin saadaan

$$4\pi \left( r \frac{\partial \chi}{\partial r} - \chi \right)_{r=\varepsilon} - \frac{4\pi}{c^2} \int_0^\varepsilon dr r \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\delta(t). \quad (500)$$

Kun annetaan  $\varepsilon \rightarrow 0$ , menevät kaikki muut termit pieneksi paitsi että jää  $4\pi\chi(t) = \delta(t)$ . Saadaan siis Greenin funktio

$$G(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi r} \delta(t - r/c) & \text{kun } t > 0 \\ 0 & \text{kun } t < 0. \end{cases} \quad (501)$$

Se on nolasta poikkeava vain pallon pinnalla joka syntyy hetkellä  $t = 0$  origossa ja laajenee valon nopeudella.

[Huom: tämän tyyppinen ratkaisu on olemassa 1 ja 3 (yleisesti pariton) ulotteisissa avaruuksissa. Esim. kahdessa dimensiossa Greenin funktio ei häviä kun  $r < ct$ .]

Sovelletaan saatuja tuloksia kenttäyhtälöihin (488). Skaalaripotentiaalille saadaan

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3V' \int dt' \frac{\delta(t - t' - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3V' \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned} \quad (502)$$

Vastaavasti vektoripotentiaalille

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3V' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (503)$$

Näissä varaukset ja virrat ovat *viivästettyjä*, ts. ne pitää laskea ajanhetkellä  $t' = t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . Jos varaus- ja virtajakautumat ovat ajasta riippumattomia, redusoituvat saadut lausekkeet aikaisempiin (344) ja (383). Täydellisyyden vuoksi olisi vielä tarkistettava että mittaehto (446), joka oletettiin johdossa, todella on toteutunut.

Tässä kohtaa on hyvä muistella ongelmaa, joka syntyi Coulombin lain (266) ja suhteellisuusteorian ristiriidasta. Näemme nyt että tarvittava relativistinen korjaus potentiaalille  $\varphi$  (502) on itse asiassa mitä yksinkertaisin. Huomaa kuitenkin, että vastaava yleistys *ei päde itse kenttiin*:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \neq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3V' \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}, \quad (504)$$

kuten pian tullaan näkemään.

Potentiaalien lausekkeet voidaan myös yhdistää nelivektorilausekkeeksi

$$A^i(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3V' \frac{j^i(\mathbf{r}', t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

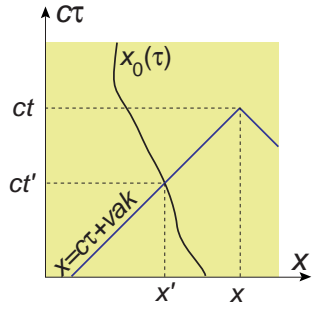
Komponenttimuodot saadaan tästä muistamalla että  $A^i = (\varphi/c, \mathbf{A})$  ja  $j^i = (c\rho, \mathbf{j})$ .

### Liikkuvan pistevarausten kenttä

Tarkastellaan hiukkasta joka liikkuu rataa  $\mathbf{r}_0(\tau)$  pitkin. Kuten edellä lasketaan potentiaali nelipisteessä  $(ct, \mathbf{r})$ . Olennainen hiukkasen nelipiste  $(ct', \mathbf{r}_0(t'))$  määräytyy ehdosta

$$t' + \frac{R(\mathbf{r}, t')}{c} = t \quad (505)$$

missä  $\mathbf{R}(\mathbf{r}, t') = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')$ . Tällä yhtälöllä on vain yksi ratkaisu  $t'$  jolle  $t' < t$  koska hiukkasen nopeus  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}_0/dt'$  on pienempi kuin valon nopeus.



Kuvassa oletettu että  $y$  ja  $z$  koordinaatit ovat vakiot.

Potentiaalin laskemiseksi käytetään hyväksi Lorentz-invarianttisuutta. Valitaan sellainen koordinaatisto jossa hiukkanen on levossa hetkellä  $t'$ .

Näin ollen saadaan kaavoista (502) ja (503)

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{R(\mathbf{r}, t')}, \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = 0. \quad (506)$$

Tämä voidaan kirjoittaa nelivektorien avulla

$$A^i(t, \mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{u^i}{cR_k u^k}, \quad (507)$$

missä  $u^i$  on hiukkasen nelinopeus ja  $R^k = (c(t - t'), \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'))$ . Nähdään että tämä redusoituu edelliseen kun hiukkanen on levossa hetkellä  $t'$ . Mutta koska jälkimmäinen lauseke on kirjoitettu Lorentz-invariantilla tavalla, on se riippumaton koordinaatistosta, ja siksi voimassa kaikissa koordinaatistoissa. Yleisessä koordinaatistossa siis saadaan

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}/c}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e\mathbf{v}}{c^2 (R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}/c)}. \end{aligned} \quad (508)$$

Näitä sanotaan *Lienard-Wiechert potentiaaleiksi*. Huomaa että muuttujat oikealla puolella ovat suoraan  $\mathbf{r}$  ja  $t'$  [sillä  $\mathbf{R}(\mathbf{r}, t')$  ja  $\mathbf{v}(t')$ ] ja riippuvuus  $t'(\mathbf{r}, t)$  saadaan yhtälöstä (505).

Jotta voisimme laskea sähkö- ja magneettikentät (197)-(198), on meidän derivoitava potentiaaleja  $\mathbf{r}$ :n ja  $t$ :n suhteen. Pitää siis laskea mm.

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t}. \quad (509)$$

Ensimmäiselle tekijälle lasketaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t'} &= \frac{\partial \sqrt{R^2}}{\partial t'} = \frac{1}{2R} \frac{\partial R^2}{\partial t'} = \frac{1}{2R} \frac{\partial (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'))^2}{\partial t'} \\ &= -\frac{1}{R} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{R} \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (510)$$

joten

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{1}{R} \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} \frac{\partial t'}{\partial t}. \quad (511)$$

Toisaalta voimme laskea kaavasta  $R(\mathbf{r}, t') = c(t - t')$  (505)

$$\frac{\partial R}{\partial t} = c \left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right). \quad (512)$$

Näistä voimme ratkaista

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{cR}}. \quad (513)$$

Derivoimalla samaa relaatiota paikkakoordinaatin suhteen saamme

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)_t &= \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)_{t'} + \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{x}{R} - \frac{1}{R} \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} \frac{\partial t'}{\partial x} \\ &= -c \frac{\partial t'}{\partial x}. \end{aligned} \quad (514)$$

Vastaavasti muille komponenteille. Näin voimme ratkaista

$$\nabla t' = -\frac{\mathbf{R}}{c \left(R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)}. \quad (515)$$

Lisäksi tarvitaan

$$\left(\frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta}\right)_t = \left(\frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta}\right)_{t'} + \frac{\partial R_\alpha}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x_\beta} = \delta_{\alpha\beta} - v_\alpha \frac{\partial t'}{\partial x_\beta}.$$

Tämä lopputulos on joskus käytännöllistä ilmaista käyttäen dyadimerkintää

$$\nabla \mathbf{R} = \mathbb{I} + \nabla t' \mathbf{v} \quad (516)$$

jossa siis on kaksi vektoria peräkkäin määrättyssä järjestyksessä, mutta niiden välistä vektorioperaatiota ei ole määrätty. Tässä  $\mathbb{I} = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}$  tarkoittaa yksikködyadia, joka on yksikkömatriisin vastine dyadeissa. Kaavasta (516) seuraa välittömästi mm.

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{R} = \mathbf{v} + \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla t'). \quad (517)$$

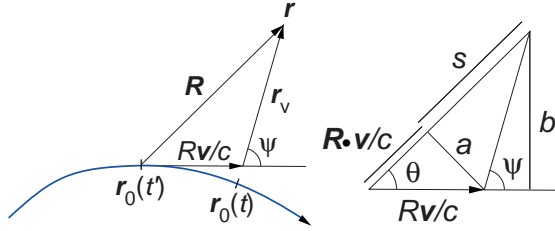
Väitämme että näitä käyttäen saamme potentiaaleista (508) suoraviivaisella laskulla

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)^3} \left(\mathbf{R} - \frac{R\mathbf{v}}{c}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c^2 \left(R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)^3} \mathbf{R} \times \left[ \left(\mathbf{R} - \frac{R\mathbf{v}}{c}\right) \times \dot{\mathbf{v}} \right] \right\}, \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{cR} \mathbf{R} \times \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (518)$$

Huomataan että sähkökenttä muodostuu kahdesta termistä joista ensimmäistä kutsutaan induktiokentäksi ja jälkimmäistä säteilykentäksi. Tarkastellaan näitä tarkemmin seuraavassa.

Nähdään että jos  $\mathbf{v} = 0$ , induktiokenttä redusoituu tuttuun Coulombin kenttään (342).





Huomaa että  $\mathbf{R}$  on ”retardoitu paikkavektori”, siis vektori hiukkasen paikasta  $\mathbf{r}_0(t')$  ajalla  $t'$  havaintopisteeseen  $\mathbf{r}$ . Kentän suunta induktiotermissä on  $\mathbf{r}_v = \mathbf{R} - \frac{R\mathbf{v}}{c} = \mathbf{R} - (t - t')\mathbf{v}$ , mikä on sama kuin hiukkasen ja havaintopisteen samanaikainen erotus, mikäli hiukkasen olisi hetken  $t'$  jälkeen liikkunut vakionopeudella. Nimittäjässä esiintyvälle tekijälle voidaan geometrisesti päätellä lausekkeet

$$\begin{aligned} \left(R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)^2 &= s^2 = r_v^2 - a^2 = r_v^2 - \frac{R^2 v^2}{c^2} \sin^2 \theta \\ &= r_v^2 - \frac{R^2 v^2}{c^2} \frac{b^2}{R^2} = r_v^2 - \frac{v^2}{c^2} b^2 = r_v^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \psi\right). \end{aligned}$$

Näin ollen induktiokentän tulisi olla sama mikä harjoitustehtävänä johdettiin tasaisesti liikkuvalla varaukselle käyttäen Lorentz-muunnosta. Suurilla etäisyyksillä induktiokenttä heikkenee kuten  $r^{-2}$ . Hitaille nopeuksille (lineaarinen termi  $v/c$ :ssä) saadaan että sähkökenttä on sama kuin Coulombin kenttä, ja magneettikentälle saadaan (harjoitus)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e\mathbf{v} \times \mathbf{r}_v}{r_v^3}, \quad (519)$$

mikä on samaa muotoa kuin Biot-Savart-laissa (389).

Edellä johdettiin että sähkömagneettiseen kenttään liittyy liikemääräntiheys  $\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  (337). Tämä voidaan helposti laskea hitaasti liikkuvalla varaukselle (harjoitus). Havaitaan että varauksen sähkömagneettinen liikemäärä divergoi pistemäisen varauksen rajalla. Tulos on samanlainen kuin energian kohdalla edellä. Koska sekä energia että liikemäärä ovat ilmaistavissa massan avulla, saadaan seuraava päätelmä: klassisen alkeishiukkasen massa koostuu kahdesta osasta jotka ovat sähkömagneettisen kentän massa (joka divergoi pistemäisen varauksen rajalla) ja muu massa. Mikä on näiden kahden osuuden suhde, ei voida vastata klassisessa teoriassa. Kokeellisesti voidaan mitata vain näiden kahden osuuden summa, sikäli kun ei mennä tutkimaan hyvin pieniä etäisyyksiä (350). Kun siirrytään kvanttimekaaniseen teoriaan, havaitaan että uusia ilmiöitä tulee vastaan ennen kuin näin pieniin etäisyyksiin päästään. Kvanttimekaniikkakaan ei anna vastausta siihen, mikä on sähkömagneettisen massan ja muun massan suhteellinen osuus.

Tarkastellaan nyt kentän (518) toista termiä, ns. säteilykenttää. Tämä osuus on verrannollinen varauksen kiihtyvyyteen  $\dot{\mathbf{v}}$ , joten se häviää tasaisesti liikkuvalla varaukselle. Havaitaan että säteilykenttä heikkenee hitaasti, kuten  $R^{-1}$ , kun  $R \rightarrow \infty$ . On huomattava että yksinkertainen arvaus (504) ei anna säteilykenttää, joten arvauksen täytyy olla väärä.

Hitaan nopeuden rajalla (nollas kertaluku  $v/c$ :ssä) saadaan säteilykentälle (harjoitus)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{rad}} &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_v} [(\hat{\mathbf{r}}_v \cdot \dot{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{r}}_v - \dot{\mathbf{v}}] \\ \mathbf{B}_{\text{rad}} &= -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^3 r_v} \hat{\mathbf{r}}_v \times \dot{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (520)$$

Näistä voidaan laskea Poyntingin vektori

$$\mathbf{S} = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r_v^2} \hat{\mathbf{r}}_v [\dot{v}^2 - (\hat{\mathbf{r}}_v \cdot \dot{\mathbf{v}})^2] \quad (521)$$

Integroimalla pallon pinnan yli saadaan koko energiavirta

$$-\frac{dU}{dt} = \oint d\mathbf{a} \cdot \mathbf{S} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (522)$$

Havaitaan että tämä on riippumaton etäisyydestä. On siis kyse säteilystä joka menee äärettömyyteen. Nähdään siis että kiihtyvässä (tai hidastuvassa) liikkeessä oleva varaus säteilee energiaa. Poyntingin vektorista (521) nähdään että säteilyenergian kulmajakauma on  $\sin^2 \alpha$ , missä polaarikulma  $\alpha$  on mitattu kiihtyvyyden suunnasta.

Yksinkertaisena sovellutuksena tutkitaan sähkömagneettisen aallon sirontaa vapaata elektronista. Elektronin liikeytälö on

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{e}{m} \mathbf{E} \quad (523)$$

[Magneettinen voima on tekijällä  $v/c$  heikompi (totea), ja jätetään siksi pois.] Poyntingin vektorille saadaan

$$S = \frac{e^2 \sin^2 \alpha \ddot{x}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r_v^2} = r_0^2 \sin^2 \alpha \left(\frac{I_0}{r^2}\right), \quad (524)$$

missä  $r_0$  on elektronin klassinen säde (350) ja  $I_0 = ce_0 E^2$  on tulevan aallon intensiteetti [= energiavirrantiheys (457)]. Sironnut säteilyteho on

$$\oint d\mathbf{a} \cdot \mathbf{S} = 4\pi \frac{2}{3} r_0^2 I_0 \quad (525)$$

Sirontavaikutusala  $\sigma$  saadaan jakamalla tämä intensiteetillä

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \quad (526)$$

tämä on Thomsonin sirontakaava. Vapaalle elektronille vaikutusala on siten riippumaton säteilyn taajuudesta.

Yleisemmin kaavoilla voi analysoida mm. jarrutussäteilyä ja synkrotronisäteilyä. Kun hiukkanen liikkuu valon nopeutta lähentelevällä nopeudella, saadaan että pääosa säteilystä menee hyvin kapeaan avaruuskulmaan.

### Säteilyn reaktivoima (ei 05)

Edellä todettiin että kiihtyvässä liikkeessä oleva varattu hiukkanen säteilee energiaa. Energian säilymisen lain mukaan tämän täytyy olla pois säteilevän hiukkasen energiasta. Voiman ja vastavoiman lain mukaan siis hiukkasen kohdistuu säteilyn takia vastavoima. Tässä esitämme

yksinkertaistetun käsittelyn vastavoimasta (PP), olettaen mm.  $v \ll c$ . Systemaattisempi esittely on mm. LL2:ssa.

Energian säilymisen mukaan hiukkaseen kohdistuvan vastavoiman  $\mathbf{F}_{\text{react}}$  tekemä työ ja säteilyyn menevän energian (522) summa täytyy hävitä. Tämä tarkoittaa

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \mathbf{F}_{\text{react}} \cdot \mathbf{v} + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{e^2 \dot{v}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = 0. \quad (527)$$

Osittaisintegroimalla saadaan

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left( \mathbf{F}_{\text{react}} - \frac{e^2 \ddot{\mathbf{v}}}{6\pi\epsilon_0 c^3} \right) \cdot \mathbf{v} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{e^2 \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{6\pi\epsilon_0 c^3} = 0. \quad (528)$$

Jos kiihtyvyydet aikavälin päässä häviävät, saamme että (ainakin keskimäärin) reaktiovoima on

$$\mathbf{F}_{\text{react}} = \frac{e^2 \ddot{\mathbf{v}}}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (529)$$

Jos hiukkaseen vaikuttaa ulkoinen voima  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ , saadaan liikeyhtälöksi

$$m\dot{\mathbf{v}} - \frac{e^2 \ddot{\mathbf{v}}}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \mathbf{F}_{\text{ext}}. \quad (530)$$

Muistutamme vielä että tässä esiintyvä massa  $m$  on summa sähkömagneettisesta ja muusta massasta.

Varoitus: yhtälöllä (530) on fysikaalisen ratkaisun lisäksi olemassa epäfysikaalisia ratkaisuja, jotka kasvavat nopeasti ajassa.

Esimerkkinä tutkitaan hiukkasta harmonisessa oskillaattorissa:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 m c^3} \frac{d^3 x}{dt^3} \quad (531)$$

Oletamme että oikean puolen termi on pieni häiriö, jolloin nollannassa kertaluvussa saadaan

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (532)$$

Sijoittamalla tämä oikealle puolelle saadaan ensimmäisessä kertaluvussa yhtälö

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (533)$$

missä

$$\gamma = \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 m c^3} \quad (534)$$

Yhtälön (533) ratkaisu on (olettaen  $\gamma \ll \omega_0$ )

$$x = A e^{-i\omega_0 t} e^{-\gamma t/2} \quad (535)$$

Se kuvaa vaimennettua harmonista värähtelyä missä värähtelyn amplitudi vähitellen pienenee.

## 9. Johdanto kvanttikenttäteoriaan (ei 05)

Edellä on pitkään tarkasteltu klassista sähkömagnetismin teoriaa. Nyt on tarkoitus hieman tutustua siihen miten kvanttimekaniikka muuttaa tätä teoriaa.

### 9.1 Kanoninen kvantisointi

Analyttisen mekaniikan kurssissa määriteltiin Poissonin sulkusuure seuraavasti. Tarkastellaan Hamiltonin kanonisten muuttujien  $(p_i, q_i)$  ja ajan  $t$  funktiota  $A(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t)$ . Kahden tällaisen funktion  $A$  ja  $B$  Poissonin sulkusuure määritellään

$$[A, B]_{\text{PB}} \equiv \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right). \quad (536)$$

Erityinen merkitys on kanonisten muuttujien välisillä sulkusuureilla. Sijoittamalla määritelmään (536) saadaan

$$\begin{aligned} [p_i, q_j]_{\text{PB}} &= \sum_k \left( \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial q_j}{\partial q_k} \right) \\ &= - \sum_k \delta_{ik} \delta_{jk} = -\delta_{ij} \end{aligned} \quad (537)$$

siis

$$[p_i, q_j]_{\text{PB}} = -\delta_{ij}. \quad (538)$$

Samalla tavalla nähdään että

$$[p_i, p_j]_{\text{PB}} = 0, \quad [q_i, q_j]_{\text{PB}} = 0. \quad (539)$$

Oletamme että kuulijat ovat saaneet johdannon kvanttimekaniikkaan aiemmissa kursseissa. Tässä kurssissa tätä ei toisteta. Sen sijaan vain annetaan menetelmä miten klassisesta teoriasta siirrytään kvanttimekaaniseen. Viime kädessä ainoa todellinen perustelu tälle on, että se johtaa teoriaan, joka on yhtäpitävä mittausten kanssa.

Hamiltonin mekaniikasta voidaan siirtyä kvanttimekaniikkaan seuraavasti. Poissonin sulkusuuret korvataan seuraavasti:

$$[A, B]_{\text{PB}} \rightarrow -\frac{i}{\hbar} [\check{A}, \check{B}]. \quad (540)$$

Tässä  $i$  on imaginaariyksikkö,  $\hbar = h/2\pi = 1.05 \cdot 10^{-34}$  Js on Planckin vakio, ja  $[\check{A}, \check{B}]$  on *kommutaattori*:

$$[\check{A}, \check{B}] \equiv \check{A}\check{B} - \check{B}\check{A}. \quad (541)$$

Samalla suureiden  $A$  ja  $B$  luonne on muuttunut, jonka takia olemme kirjoittaneet niiden sijasta  $\check{A}$  ja  $\check{B}$ . Hamiltonin mekaniikassa  $A$  ja  $B$  ovat funktiota:  $A(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t)$ . Näille suoraan laskettuna kommutaattori  $[A, B]$  häviää aina:  $[A, B] \equiv 0$ . Jotta kommutaattori (541) olisi nollasta poikkeava, on  $\check{A}$  ja  $\check{B}$  ymmärrettävä joko matriiseiksi tai (yleisemmin) operaattoreiksi.

Erityisesti kanonisille muuttujille saadaan kommutaattorit

$$[\check{p}_i, \check{q}_j] = -i\hbar \delta_{ij}, \quad (542)$$

$$[\check{p}_i, \check{p}_j] = 0, \quad [\check{q}_i, \check{q}_j] = 0. \quad (543)$$

Lisäksi oletetaan että operaattorit  $\check{q}$  ja  $\check{p}$  ovat *hermiittisiä*, mikä tullaan määrittelemään myöhemmin.

Edellä esitettyä kvanttimekaniikkaan siirtymistä on täydennettävä ainakin siltä osin, miten liittyy yleinen operaattori  $\check{A}$  mittauksissa saatuihin arvoihin. Jätetään tämän perusteellisempi tutkiskelu kvanttimekaniikan kursseihin, ja käsitellään asiaa alla vain esimerkinluonteisesti.

### Esimerkki: harmoninen oskillaattori

Tutkitaan yksiulotteista harmonista oskillaattoria. Sen Lagrangen funktio (28) voidaan kirjoittaa muotoon

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2). \quad (544)$$

Tästä saadaan kanoninen liikemäärä  $p \equiv dL/d\dot{q} = \dot{q}$  ja Hamiltonin funktio

$$\mathbb{H} \equiv p\dot{q} - L = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2). \quad (545)$$

Kvantisoinnissa koordinaatit  $q$  ja  $p$  korvautuvat operaattoreilla  $\check{q}$  ja  $\check{p}$  jotka toteuttavat

$$\begin{aligned} [\check{q}, \check{p}] &= i\hbar, \\ [\check{q}, \check{q}] &= 0, \\ [\check{p}, \check{p}] &= 0. \end{aligned} \quad (546)$$

Kvanttimekaaninen harmoninen oskillaattori voidaan käsitellä monella eri tavalla. Yksi vaihtoehto on esittää  $\check{q}$  ja  $\check{p}$  operaattoreina jotka operoivat funktioon  $\psi(x)$ . Kommutaattorelaatiot (546) saadaan toteutettua valitsemalla vastaavuudet

$$\check{q}: \quad \psi(x) \rightarrow x\psi(x) \quad (547)$$

$$\check{p}: \quad \psi(x) \rightarrow -i\hbar \frac{d\psi}{dx}(x). \quad (548)$$

Lyhyemmin voidaan kirjoittaa

$$\check{q} = x, \quad \check{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}. \quad (549)$$

Tällöin Hamiltonin funktio myös muuttuu operaattoriksi

$$\check{\mathbb{H}} = \frac{1}{2} \left( -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2 x^2 \right). \quad (550)$$

Funktiota  $\psi(x)$  kutsuaan *aaltofunktioksi*. Aaltofunktio sisältää kaiken informaation systeemin tilasta. Klassisen mekaniikan koordinaatit  $q$  ja  $p$  eivät kvanttimekaniikassa aina ole täsmällisesti määrättävissä. Sen sijaan niitä vastaavat nyt odotusarvot

$$\langle q \rangle = \int dx \psi^*(x) \check{q} \psi(x) = \int dx \psi^*(x) x \psi(x)$$

$$\langle p \rangle = \int dx \psi^*(x) \check{p} \psi(x) = -i\hbar \int dx \psi^*(x) \frac{d\psi}{dx}(x),$$

missä  $\int dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx$ .

Tästä päätellään mm. että  $|\psi(q)|^2$  esittää todennäköisyyttä jolla kukin koordinaatin  $q$  arvo esiintyy. Vastaavasti energian  $\mathbb{E}$  odotusarvo saadaan kaavasta

$$\langle \mathbb{E} \rangle = \int dx \psi^*(x) \check{\mathbb{H}} \psi(x). \quad (551)$$

Olemme erityisesti kiinnostunut tapauksesta jolloin energialla  $\mathbb{E}$  on täysin täsmällinen arvo. Näin on siinä tapauksessa että aaltofunktio on Hamiltonin operaattorin *ominaisfunktio*:

$$\frac{1}{2} \left( -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2 x^2 \right) \psi(x) = \mathbb{E} \psi(x). \quad (552)$$

Tämä on (ajasta riippumaton) *Schrödingerin yhtälö* harmoniselle oskillaattorille. Kvanttimekaniikan kursseilta tiedetään, että tällä differentiaaliyhtälöllä on äärellisiä ratkaisuja vain tietyllä  $\mathbb{E}$ :n arvoilla. Nämä energian ominaisarvot ovat

$$\mathbb{E} = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega, \quad (553)$$

missä  $n = 0, 1, 2, \dots$

Harmonisen oskillaattorin energian ominaisarvot (553) voi määrittää myös toisella tavalla. Tässä ei tarvita operaattorien  $\check{q}$  ja  $\check{p}$  esitystä aaltofunktion avulla. Sen sijaan oletetaan yleisemmin, että on olemassa *lineaariavaruus* jonka objekteja merkitään  $|a\rangle$ . Lineaariavaruudessa on määritelty yhteenlasku  $|a\rangle + |b\rangle = |a+b\rangle$  sekä skalaarilla kertominen  $\lambda|a\rangle = |\lambda a\rangle$ , missä skalaari  $\lambda$  voi olla kompleksiluku. (Harjoitus: kertaa lineaariavaruuden perusoletukset lineaarialgebran kurssista.)  $[|a\rangle$  on yleistys aaltofunktiosta  $a(x)$ .] Lisäksi määritellään kahden alkion  $|b\rangle$  ja  $|a\rangle$  sisätulo  $\langle b|a\rangle$ . Sisätulo on skalaari, ja vaaditaan ominaisuudet

$$\begin{aligned} \langle a|b\rangle &= \langle b|a\rangle^*, \\ \langle c|a+b\rangle &= \langle c|a\rangle + \langle c|b\rangle, & \langle b+c|a\rangle &= \langle b|a\rangle + \langle c|a\rangle, \\ \langle b|\lambda a\rangle &= \lambda \langle b|a\rangle, & \langle \lambda b|a\rangle &= \lambda^* \langle b|a\rangle, \\ \langle a|a\rangle &\geq 0, & \langle a|a\rangle = 0 &\Leftrightarrow |a\rangle = 0, \end{aligned} \quad (554)$$

missä 0 tarkoittaa lineaariavaruuden nolla-alkiota. [Osoita että  $\langle a|b\rangle = \int dx b^*(x) a(x)$  toteuttaa kaikki sisätulon ehdot.] Kvanttimekaniikan operaattorit ovat kuvauksia sisätuloavaruudessa. Kun operaattori  $\check{A}$  operoi alkioon  $|a\rangle$ , voidaan tulosta merkitä  $\check{A}|a\rangle = |\check{A}a\rangle$ .

Operaattorin  $\check{A}$  *hermiittiskonjugaatti*  $\check{A}^\dagger$  määritellään

$$\langle \check{A}^\dagger b|a\rangle = \langle b|\check{A}a\rangle, \quad \forall |a\rangle, |b\rangle. \quad (555)$$

Jatkossa oletetaan operaattoreista  $\check{q}$  ja  $\check{p}$  ainoastaan, että ne ovat *hermiittisiä*, eli että ne ovat itsensä hermiittiskonjugaatteja ( $\check{q}^\dagger = \check{q}$ ,  $\check{p}^\dagger = \check{p}$ ). Harjoitus: osoita että edellä määritellyt aaltofunktioiden operaattorit (548) ovat hermiittisiä.

Määritellään operaattorit

$$\begin{aligned} \check{c} &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\check{q} + i\check{p}), \\ \check{c}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\check{q} - i\check{p}). \end{aligned} \quad (556)$$

Harjoitus: osoita että  $\check{c}^\dagger$  todella on  $\check{c}$ :n hermiittiskonjugaatti.

Lasketaan

$$[\check{c}, \check{c}^\dagger] = \frac{1}{2\hbar\omega} (\omega^2[\check{q}, \check{q}] - i\omega[\check{q}, \check{p}] + i\omega[\check{p}, \check{q}] + [\check{p}, \check{p}]) = 1,$$

missä viimeinen muoto seuraa kommutaatiorelaatioista (546). Triviaalisti  $[\check{c}, \check{c}] = [\check{c}^\dagger, \check{c}^\dagger] = 0$ .

Tutkitaan operaattoria

$$\check{n} = \check{c}^\dagger \check{c}. \quad (557)$$

Se on hermiittinen (totea). Hermiittisen operaattorin ominaisarvot ovat reaaliset. (Tämän todistus on oleellisesti sama kuin pienten värähtelyjen yhteydessä osoitettu ominaisarvojen reaalisuus, joka oli harjoitustehtävänä.) Merkitään operaattorin  $\check{n}$  ominaistiloja käyttäen ominaisarvoa  $n$  indeksinä:

$$\check{n}|n\rangle = n|n\rangle. \quad (558)$$

Oletetaan ominaistilat normalisoiduiksi:  $\langle n|n\rangle = 1$ . Nähdään että ominaisarvo  $n$  on ei-negatiivinen:

$$n = \langle n|\check{n}n\rangle = \langle \check{c}n|\check{c}n\rangle \geq 0. \quad (559)$$

Helposti lasketaan

$$[\check{n}, \check{c}] = -\check{c}. \quad (560)$$

Tästä saadaan

$$\check{n}|\check{c}n\rangle = \check{c}\check{n}|n\rangle - \check{c}|n\rangle = (n-1)|\check{c}n\rangle, \quad (561)$$

mistä nähdään että  $\check{c}|n\rangle$  antaa ominaisarvoon  $n-1$  kuuluvan tilan:  $\check{c}|n\rangle = c|n-1\rangle$ . Normalisaatio antaa

$$|c|^2 = \langle \check{c}n|\check{c}n\rangle = \langle n|\check{c}^\dagger\check{c}n\rangle = n, \quad (562)$$

minkä perusteella kiinnitetään

$$\check{c}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad (563)$$

Jos operoidaan tarpeeksi monta kertaa  $\check{c}$ :llä, joudutaan lopulta negatiivisiin ominaisarvoihin, mikä on ristiriidassa kaavan (559) kanssa. Ristiriidasta päästään vain siten että  $n$  on aina kokonaisluku, jolloin  $\check{c}|0\rangle = 0$ , ja aleneva prosessi katkeaa. (Huomaa olennainen ero ominaisarvon nolla ominaistilan  $|0\rangle$  ja lineaariavaruuden nolla-alkion  $0$  välillä.) Vastaavasti voidaan laskea tuloksia  $\check{c}^\dagger$ :lle. Kootaan tähän tärkeimmät tulokset

$$\begin{aligned} \check{c}^\dagger\check{c}|n\rangle &= n|n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty \\ \check{c}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\ \check{c}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \end{aligned} \quad (564)$$

Nähdään että  $\check{c}$  ja  $\check{c}^\dagger$  ovat operaattoreita, joilla voidaan kiivetä ”tikapuita” alas ja ylös askel kerrallaan.

Lasketaan vielä Hamiltonin operaattori

$$\check{\mathbb{H}} = \frac{1}{2}(\check{p}^2 + \omega^2\check{q}^2) = \frac{1}{2}\hbar\omega(\check{c}\check{c}^\dagger + \check{c}^\dagger\check{c}) = \left(\check{n} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega. \quad (565)$$

Tästä saadaan sama tulos energian kvantittumiselle kuin väitettiin edellä (553).

## 9.2 Sähkömagneettisen kentän kvantisointi

Edellä johdettiin vapaan sähkömagneettisen kentän Hamiltonin funktio (485)

$$\mathbb{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} (P_{\mathbf{k},\alpha}^2 + c^2 k^2 Q_{\mathbf{k},\alpha}^2)$$

kanonisten muuttujien  $Q_{\mathbf{k},\alpha}$  ja  $P_{\mathbf{k},\alpha}$  funktiona. Kun sovelletaan kanonista kvantisointia näihin muuttujiin saadaan

$$\begin{aligned} [\check{Q}_{\mathbf{k},\alpha}, \check{P}_{\mathbf{k}',\alpha'}] &= i\hbar\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{\alpha,\alpha'}, \\ [\check{Q}_{\mathbf{k},\alpha}, \check{Q}_{\mathbf{k}',\alpha'}] &= 0, \\ [\check{P}_{\mathbf{k},\alpha}, \check{P}_{\mathbf{k}',\alpha'}] &= 0. \end{aligned} \quad (566)$$

Tällöin myös edellä määritellyt suureet  $a_{\mathbf{k},\alpha}$  (473) muuttuvat operaattoreiksi. Määritellään niiden avulla operaattorit

$$\check{c}_{\mathbf{k},\alpha} = \sqrt{\frac{2\omega_{\mathbf{k}}\epsilon_0}{\hbar}}\check{a}_{\mathbf{k},\alpha}, \quad \check{c}_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger = \sqrt{\frac{2\omega_{\mathbf{k}}\epsilon_0}{\hbar}}\check{a}_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger.$$

Yleistäen laskua jonka teimme harmonisen värähtelijän tapauksessa saadaan

$$\begin{aligned} [\check{c}_{\mathbf{k},\alpha}, \check{c}_{\mathbf{k}',\alpha'}^\dagger] &= \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{\alpha,\alpha'}, \\ [\check{c}_{\mathbf{k},\alpha}, \check{c}_{\mathbf{k}',\alpha'}] &= [\check{c}_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger, \check{c}_{\mathbf{k}',\alpha'}^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (567)$$

Näiden perusteella määritellään analogisesti

$$\check{N}_{\mathbf{k},\alpha} = \check{c}_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger \check{c}_{\mathbf{k},\alpha}. \quad (568)$$

Näillä saadaan Hamiltonin operaattori muotoon

$$\check{\mathbb{H}} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} (\check{N}_{\mathbf{k},\alpha} + \frac{1}{2})\hbar\omega_{\mathbf{k}}. \quad (569)$$

Nähdään siis että jokainen kentän värähtelymoodi myös kvanttimekaniikassa värähtelee toisista moodeista riippumattomasti. Jokainen moodi on kvantisoitu kuten yksinkertainen harmoninen oskillaattori. Voidaan myös laskea liikemääräoperaattori, jolle saadaan

$$\check{P} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} (\check{N}_{\mathbf{k},\alpha} + \frac{1}{2})\hbar\mathbf{k}. \quad (570)$$

Tämä tulos on odotettavissa tietäen edeltä että aallon liikemäärä (458) on  $\mathbf{p} = (\mathbb{E}/c)\hat{\mathbf{n}} = (\hbar\omega_{\mathbf{k}}/c)\hat{\mathbf{n}} = \hbar\mathbf{k}$ .

Kvantisointi on tuonut aaltoteoriaan hiukkasominaisuudet. Näitä hiukkasia kutsutaan *fotoneiksi*. Operaattorin  $\check{N}_{\mathbf{k},\alpha}$  ominaisarvo antaa kuinka monta fotonia on aaltovektorilla  $\mathbf{k}$  ja polarisaatiotilassa  $\alpha$ . Yhden fotonin energia on  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$  ja liikemäärä  $\hbar\mathbf{k}$ . Fotonien määrä kullakin aaltovektorilla ja polarisaatiosuunnalla on  $0, 1, 2, \dots, \infty$ .

Operaattori  $\check{c}_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger$  voidaan ymmärtää fotonin *luomisoperaattoriksi* koska se lisää yhden fotonin mihin tahansa tilaan. Vastaavasti operaattori  $\check{c}_{\mathbf{k},\alpha}$  on fotonin *hävitysoperaattori*. Kirjoitetaan kenttäoperaattori vielä näiden avulla

$$\begin{aligned} \check{A}(t, \mathbf{r}) = & \\ = & \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}\epsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=1,2} \left[ \check{c}_{\mathbf{k},\alpha}(0)\epsilon^{(\alpha)} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega_{\mathbf{k}}t) \right. \\ & \left. + \check{c}_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger(0)\epsilon^{(\alpha)} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega_{\mathbf{k}}t) \right]. \end{aligned} \quad (571)$$

Kvanttikentällä alin energiatila vastaa tapausta jossa  $N_{\mathbf{k},\alpha} = 0$  kaikilla  $\mathbf{k}$  ja  $\alpha$ . Tämä tila vastaa tyhjiötä jossa ei ole yhtään fotonia. Tämän tilan energia kaavan (569) mukaan on ääretön, sillä värähtelymoodien määrä on ääretön ja niiden *nollapistevärähtelyistä* aiheutuva energia on myös ääretön. Edellä klassiselle pistemäiselle varaukselle saatiin ääretön energia. Nyt on saatu ensimmäinen esimerkki kvanttiteoriassa esiintyvistä äärettömyyksistä. Tässä tapauksessa äärettömyydestä on helppo selvittää vain sanomalla että valitaan tyhjiön energia nolaksi. Samantyyppisiä (mutta monimutkaisempia) äärettömyyksiä tulee kvanttikenttäteoriassa vastaan useampia.

Jos fotonien määrä on paljon suurempi kuin 1, on kommutaattorin (566) arvo hyvin pieni verrattuna kommutaattorissa esiintyviin suureisiin. Tässä tapauksessa klassinen teoria on hyvä approksimaatio. Näin on esimerkiksi radiolähettimissä. Jos fotonien määrä moodissa on pieni (esim. 0, 1 tai 2) on kommutaattori olennainen, ja kvanttikenttäteorian tulokset saattavat merkittävästi poiketa klassisista.

Ollaan tultu hyvin lähelle sitä mistä koko kvanttiteoria sai alkunsa. Planck nimittäin päätyi kvanttilhypoteesiin tutkiessaan sähkömagneettista säteilyä. Klassisen tilastollisen mekaniikan mukaan tasapainotilassa kaikilla moodeilla on värähtelyä jonka energia kasvaa lineaarisesti absoluuttisen lämpötilan  $T$  funktiona:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} k_{\text{Boltzmann}} T, \quad (572)$$

joka on ns. ekvipartitioteoreema. Kvanttimekaniikassa energia ei ole jatkuva vaan diskreetti, jolloin moodit joilla  $\hbar\omega_{\mathbf{k}} \gg k_{\text{Boltzmann}}T$  eivät merkittävästi viritä. Tämä merkitsee olennaisesti sitä että summa kaavassa (572) on katkaistava poikki energialla  $\hbar\omega_{\mathbf{k}} \approx k_{\text{Boltzmann}}T$ , jolloin päädytään äärelliseen termiseen energiaan. Tarkempi käsittely statistisen fysiikan kurssilla.

### 9.3 Materiakentän ensimmäinen kvantisointi

Klassisessa osuudessa tutkimme sähkömagneettista kenttää joka vuorovaikuttaa hiukkasten kanssa. Jotta voisimme tutkia tämän kvanttiteoriaa, meidän on kvantisoitava sekä sähkömagneettisen kentän osuus että myös ma-

terian osuus. Jälkimmäinen tehdään kahdessa osassa joita kutsutaan *ensimmäiseksi* ja *toiseksi kvantisoinniksi*.

Tutkitaan ensimmäisessä vaiheessa yhtä hiukkasta. Epärelativistisella rajalla hiukkasen Hamiltonin funktio on

$$\mathbb{H} = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}). \quad (573)$$

Kanoninen kvantisointi käyttäen esityksiä (547) ja (548) [yleistettynä kolmiavaruuteen] antaa vastaavan operaattorin

$$\check{\mathbb{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}). \quad (574)$$

Ns. Schrödingerin kuvassa (mitä emme tässä johda) saadaan ajasta riippuva yhtälö

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, \mathbf{r}) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \psi(t, \mathbf{r}). \quad (575)$$

Tämä voidaan saada tulkitsemalla

$$\check{\mathbb{H}} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (576)$$

Kuten keskusteltiin edellä, on Schrödingerin yhtälö ekvivalentti seuraavan Lagrangen tiheyden kanssa:

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar}{2i} (\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi) + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi + V \psi^* \psi. \quad (94)$$

Tässä on kuitenkin se vika, että se ei ole invariantti Lorentz-muunnoksessa (aikaderivaatta esiintyy lineaarisesti, paikkaderivaatat neliöllisesti).

Yksinkertaisin arvaus muodostaa kovariantti Lagrangen tiheys joka edes vähän muistuttaa lauseketta (94) on olettaa

$$\mathcal{L} = \frac{\partial \psi^*}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} - \mu^2 |\psi|^2. \quad (577)$$

Tämä johtaa yhtälöön (harjoitus)

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \mu^2 \psi, \quad (578)$$

mikä on *Klein-Gordonin yhtälö*. Huomaa että operaattoritulkinnolla (548) ja (576) tämä on kvantisoitu muoto dispersiorelaatiosta (166), joka johdettiin relativistiselle hiukkaselle:

$$\frac{\mathbb{H}^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2, \quad (579)$$

kun  $\mu = mc/\hbar$ .

#### Diracin yhtälö

Osoittautuu että Klein-Gordonin yhtälö ei kuitenkaan kuvaa elektroneja. Dirac johti vuonna 1928 elektroneja kuvaavan yhtälön lähtemällä siitä että yhtälössä esiintyy vain ensimmäisiä derivaattoja, ts.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \check{\mathbb{H}} \psi = -i\hbar \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \psi + \beta mc^2 \psi. \quad (580)$$



Tällainen yhtälö on mahdollinen vain jos  $\psi$  ei ole skalaari, vaan sillä on useampia komponentteja,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (581)$$

sillä muuten paikkaderivaattatermi ei olisi isotrooppinen (sama kaikkiin suuntiin). Vastaavasti, myös kertoimet  $\alpha = \sum_{i=1}^3 \hat{x}_i \alpha_i$  ja  $\beta$  ovat matriiseja. Jotta Diracin yhtälö (580) kuvaisi relativistisia hiukkasia, pitää siitä saada dispersiorelaatio (579). Lasketaan siis

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^2 &= (-i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m c^2)^2 \\ &= -c^2 \hbar^2 (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)(\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla) \\ &\quad - i c^3 \hbar m (\boldsymbol{\alpha} \beta + \beta \boldsymbol{\alpha}) \cdot \nabla \\ &\quad + m^2 c^4 \beta^2. \end{aligned} \quad (582)$$

Jotta tämä operaattoritulkinnalla (548) antaisi (166):n on vaadittava

$$\begin{aligned} \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= 2\delta_{ij} \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0 \\ \beta^2 &= 1 \end{aligned} \quad (583)$$

Lisäksi on vaadittava että matriisit  $\alpha_i$  ja  $\beta$  ovat hermiittisiä (jotta  $\mathbb{H}$  olisi hermiittinen). Väitetään että pienin dimensio jolla nämä voidaan toteuttaa on 4. Siis

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \quad (584)$$

Tätä kutsutaan Diracin spinoriksi. Kertoimet  $\alpha$  ja  $\beta$  ovat siis  $4 \times 4$ -matriiseja. Ne voidaan esittää  $2 \times 2$  Paulin spinimatriisien  $\sigma_i$  ja yksikkömatriisin  $I$  avulla

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \quad (585)$$

Harjoitus: osoita että ehdot (583) toteutuvat. Kätevä apu on relaatiosta

$$(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad (586)$$

missä  $\mathbf{a}$  ja  $\mathbf{b}$  ovat mielivaltaisia vektoreita.

Pyritään ymmärtämään Diracin yhtälöä tutkimalla yksinkertaisia rajatapauksia. Levossa olevalle hiukkaselle saadaan

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \beta m c^2 \psi. \quad (587)$$

Tämän ratkaisut ovat

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i \frac{m c^2}{\hbar} t), \quad \psi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i \frac{m c^2}{\hbar} t) \\ \psi^{(3)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i \frac{m c^2}{\hbar} t), \quad \psi^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(i \frac{m c^2}{\hbar} t) \end{aligned}$$

Ratkaisut  $\psi^{(1)}$  ja  $\psi^{(2)}$  vastaavat positiivista energiaa ja  $\psi^{(3)}$  ja  $\psi^{(4)}$  negatiivista energiaa. Tämä ominaisuus on seurausta siitä että dispersiorelaatiolla (579) on sekä negatiivisia että positiivisia juuria

$$\mathbb{H} = \pm \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}, \quad (588)$$

Unohtetaan negatiiviset energiat toistaiseksi ja tutkitaan kahta positiivisen energian ratkaisua.

Edellä johdettiin että ulkoisessa sähkömagneettisessa kentässä dispersiorelaatio (579) korvautuu lausekkeella (183)

$$\left( \frac{\mathbb{H} - e\varphi}{c} \right)^2 = m^2 c^2 + (\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2, \quad (183)$$

Tekemällä vastaavat muutokset saa Diracin yhtälö (580) muodon

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = [c\boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\hbar \nabla - e\mathbf{A}) + \beta m c^2 + e\varphi] \psi. \quad (589)$$

Ratkaistaan tämä hitaasti liikkuvalla positiivisen energian hiukkaselle ( $v \ll c$ ). Suurin aikariippuvuus tulee silloin termistä  $\exp(-imc^2 t/\hbar)$  joka tekijä otetaan erikseen. Kirjoitetaan lisäksi Diracin spinori (584) kahden 2-spinorin avulla

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \zeta \end{pmatrix} \exp(-i \frac{m c^2}{\hbar} t). \quad (590)$$

Sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} &= c\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\hbar \nabla - e\mathbf{A}) \zeta + e\varphi \chi \\ i\hbar \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= c\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\hbar \nabla - e\mathbf{A}) \chi + (-2m c^2 + e\varphi) \zeta \end{aligned}$$

Jälkimmäisen ratkaisu on likimäärin

$$\zeta = \frac{1}{2m c} \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\hbar \nabla - e\mathbf{A}) \chi. \quad (591)$$

Sijoittamalla ensimmäiseen saadaan

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{1}{2m} [\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\hbar \nabla - e\mathbf{A})]^2 \chi + e\varphi \chi. \quad (592)$$

Relaatiosta (586) saadaan

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\hbar \nabla - e\mathbf{A})]^2 &= (-i\hbar \nabla - e\mathbf{A})^2 \\ &\quad + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\hbar \nabla - e\mathbf{A}) \times (-i\hbar \nabla - e\mathbf{A}) \\ &= (-i\hbar \nabla - e\mathbf{A})^2 - e\hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \quad (593)$$

mikä lopulta antaa

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla - e\mathbf{A})^2 \chi + e\varphi \chi - \frac{e\hbar}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \chi. \quad (594)$$

Tämä on tuttu ajasta riippuva Schrödingerin yhtälö lukuun ottamatta kahta piirrettä. Ensiksi aaltofunktio  $\chi$  on kaksikomponenttinen. Toiseksi, yhtälön viimeinen termi kytkee nämä komponentit magneettikentässä. Kaksikomponenttisuus ymmärretään siten että elektronilla on sisäinen kulmaliikemäärä *spin*, jota vastaa operaattori  $\mathbf{S} = (\hbar/2)\boldsymbol{\sigma}$ .



Viimeinen termi on tähän liittyvä magneettisen momentin energia  $-\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ , joka vastaa gyromagneettista suhdetta  $\gamma = 2\frac{e}{2m}$  [vert. (399)]. Tämä on Diracin yhtälön suuri menestys, sillä kokeellisesti on päätelty samantyyppisen termin olemassaolo (joskin hiukan poikkeavalla kertoimella 2.00231930437 eikä 2).

Mainitaan vielä muutamia Diracin yhtälöön liittyviä tuloksia, todistukset harjoitustehtävänä. Määritellään matriisit

$$\begin{aligned}\gamma^i &= \beta\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3) \\ \gamma^0 &= \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (595)$$

Näillä saadaan Diracin yhtälö muotoon

$$[i\hbar(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}) - mc]\psi = 0 \quad (596)$$

tai

$$(i\hbar\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} - mc)\psi = 0 \quad (\text{summaus } i = 0, 1, 2, 3). \quad (597)$$

Ottamalla mukaan ulkoinen kettä saadaan

$$(i\hbar\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} - e\gamma^i A_i - mc)\psi = 0 \quad (\text{summaus } i = 0, 1, 2, 3). \quad (598)$$

Diracin yhtälö voidaan johtaa Lagrangen tiheydestä

$$\mathcal{L}_D = c\bar{\psi}(i\hbar\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} - mc)\psi \quad (599)$$

missä  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  ( $\psi^\dagger$  tarkoittaa  $\psi$ :n transpoosin kompleksikonjugaattia). Diracin yhtälöön liittyy säilyvä nelivirta

$$j_D^i = ec\bar{\psi}\gamma^i\psi. \quad (600)$$

Edellä johdettiin klassinen materiaan ja kentän vaikutusintegraali

$$S = - \sum \int mc ds - \frac{1}{c} \int d\Omega j^i A_i - \frac{1}{4\mu_0 c} \int d\Omega F^{ik} F_{ik}. \quad (280)$$

Jos materia koostuu elektronista jota kuvaa Diracin yhtälö, voidaan edellisen sijasta kirjoittaa

$$\begin{aligned}S &= S_m + S_{mk} + S_k \\ &= \frac{1}{c} \int d\Omega \left( \mathcal{L}_D - j_D^i A_i - \frac{1}{4\mu_0} F^{ik} F_{ik} \right).\end{aligned}\quad (601)$$

Tätä vastaava Lagrangen tiheys on

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\hbar\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} - mc^2)\psi - ec\bar{\psi}\gamma^i\psi A_i \\ &\quad - \frac{1}{4\mu_0} F^{ik} F_{ik}.\end{aligned}\quad (602)$$

## 9.4 Materiakentän toinen kvantisointi

Ensimmäisessä kvantisoinnissa klassinen massapiste on korvautunut kentällä. Hiukkanen on siinä oleellisesti korvattu aallolla. Tämä teoria selittää monia ennen ihmetystä herättäneitä ilmiöitä, mm. atomin diskreetit energiatilat. Tarkemmassa tutkimuksessa osoittautuu, että tämä teoria ei olekaan aivan täydellinen. Puutteita teoriassa ovat mm. Diracin yhtälön negatiiviset energiatilat ja elektronin gyromagneettisen suhteen pieni poikkeama arvosta  $2\frac{e}{2m}$ . Näihin ongelmiin löytyy ratkaisu varsin erikoisella tavalla: tulkitaan hiukkasen aaltofunktio kentäksi ja kvantisoidaan se samaan tapaan kuin sähkömagneettinen kenttä. Tätä kutsutaan *toiseksi kvantisoinniksi*. Toinen kvantisointi lisää aaltofunktioon hiukkasominaisuudet, samaan tapaan kuin sähkömagneettisen kentän kvantisointi synnytti siihen hiukkasominaisuuksia. Täten kaikki elektronit voidaan ajatella yhden suuren elektronikentän värähtelykvanteiksi. Toinen kvantisointi voidaan nähdä myös niin että ”klassinen” vaikutusintegraali (601) on kvantisoitava kaikkien kenttien suhteen.

Jotta tämä keskustelu tulisi konkreettisemmaksi kirjoitetaan muutamia asiaan liittyviä kaavoja, mutta ei pyritä johtamaan niitä. Samaan tapaan kuin vektoripotentiaali (476) voidaan Diracin aaltofunktio kehittää Fourier-sarjaksi. Kun se kvantisoidaan saadaan kenttäoperaattori

$$\begin{aligned}\check{\psi}(t, \mathbf{r}) &= \\ &= \sqrt{\frac{mc^2}{\mathbb{E}V}} \sum_{\mathbf{p}} \sum_{s=1,2} \left[ \check{b}_{\mathbf{p},s} u_s(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar} - \frac{i\mathbb{E}t}{\hbar}\right) \right. \\ &\quad \left. + \check{d}_{\mathbf{p},s}^\dagger v_s(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar} + \frac{i\mathbb{E}t}{\hbar}\right) \right].\end{aligned}\quad (603)$$

Tässä  $s$  on spin,  $u$  ja  $v$  ovat Diracin spinoreita (vastaten  $\mathbf{A}$ :n polarisaatiosuuntia) ja  $\check{b}_{\mathbf{p},s}$  ja  $\check{d}_{\mathbf{p},s}^\dagger$  luomis- ja hävitysoperaattoreita. Osoittautuu että Diracin kenttää ei voida kvantisoida käyttäen kommutaattoreita. Kvantisointi onnistuu ainoastaan käyttäen *antikommutaattoreita*

$$\{\check{A}, \check{B}\} = \check{A}\check{B} + \check{B}\check{A}, \quad (604)$$

missä eroa kommutaattoriin on siis plusmerkki miinusmerkin paikalla. Erityisesti luomis- ja hävitysoperaattorit toteuttavat

$$\begin{aligned}\{\check{b}_{\mathbf{p},s}, \check{b}_{\mathbf{p}',s'}^\dagger\} &= \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \delta_{s,s'}, \\ \{\check{d}_{\mathbf{p},s}, \check{d}_{\mathbf{p}',s'}^\dagger\} &= \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \delta_{s,s'},\end{aligned}\quad (605)$$

ja kaikki muut näiden operaattoreiden väliset *antikommutaattorit* häviävät. Samaan tapaan kuin edellä voidaan päätellä, että antikommutaattoreiden tapauksessa lukumääräoperaattorit

$$\begin{aligned}\check{N}_{\mathbf{p},s}^{e-} &= \check{b}_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger \check{b}_{\mathbf{p},s}, \\ \check{N}_{\mathbf{p},s}^{e+} &= \check{d}_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger \check{d}_{\mathbf{p},s}.\end{aligned}\quad (606)$$

saavat ainoastaan ominaisarvot 0 ja 1. Tällaisia hiukkasia kutsutaan *fermioneiksi*, kun taas kommutaattorirelaatiot (567) toteuttavia fotoneita sanotaan *bosoneiksi*.

Elektronin fermioniluonteen takia voidaan ymmärtää Diracin yhtälölle saadut negatiiviset energiatilat: Tyhjiötilaksi valitaan tila, jossa kaikki negatiiviset energiatilat ovat täysin miehitetty. (Tämä on mahdollista koska joka tilaan mahtuu enintään yksi elektroni.) Kun yksi elektroni puuttuu negatiiviselta energiatilalta, vastaa se *positronia*, elektronin *antihiukkasta*, jolla on positiivinen varaus.  $b_{\mathbf{p},s}^\dagger$  tulkitaan elektronin luomisoperaattoriksi ja  $d_{\mathbf{p},s}^\dagger$  positronin luomisoperaattoriksi. Niiden hermiittiskonjugaatit ovat vastaavat hävitysoperaattorit.

## 9.5 Häiriöteoria

Kvanttielektrodynamiikan laskut tehdään häiriöteorialla. Vastaten vaikutusintegraalia (601) voidaan Hamiltonin operaattori kirjoittaa

$$\check{H} = \check{H}_m + \check{H}_{mk} + \check{H}_k \quad (607)$$

Käsitellään materian ja sähkömagneettisen kentän kytkentää  $\check{H}_{mk}$  pienenä häirönä, jonka suhteen kaikki suureet kehitetään sarjaksi. Nollannessa kertaluvussa Hamiltonin operaattori on siis  $\check{H}_0 = \check{H}_m + \check{H}_k$ . Tämän ratkaisu tunnetaan eksaktisti. Se kuvaa toisistaan riippumattomasti eteneviä elektroneja (ja positroneja) ja sähkömagneettisia aaltoja.

Kytkeätermi ei sisällä kenttien derivaattoja. Siten sitä vastaava termi Hamiltonin funktiossa on sama kuin Lagrangen funktiossa mutta vastakkaisella merkillä. Tätä vastaava Hamiltonin operaattorin termi on siis

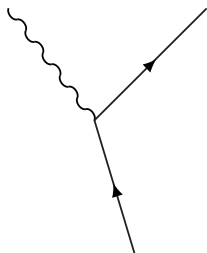
$$\check{H}_{mk} = \int dV e c \check{\psi} \gamma^i \check{\psi} \check{A}_i. \quad (608)$$

Kytkeätermissä esiintyy lineaarisesti sähkömagneettinen potentiaalioperaattori  $\check{A}_i$  (571). Se joko luo yhden fotonin tai hävittää yhden fotonin.

Elektronikenttä esiintyy kahden tekijän kautta  $\check{\psi}$  ja  $\check{\psi}^\dagger = \check{\psi}^\dagger \gamma^0$ . Kun ne ilmaistaan luomis- ja hävitysoperaattoreiden avulla (603), saadaan neljää tyyppiä olevia kombinaatioita

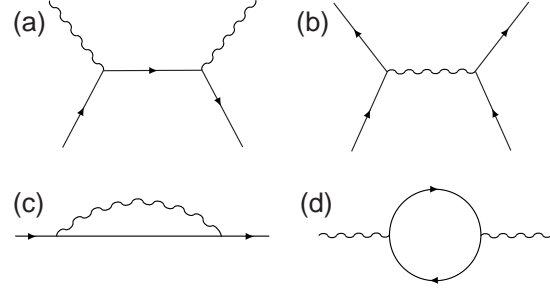
$$\check{b}_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger \check{b}_{\mathbf{p}',s'}^\dagger, \quad \check{b}_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger \check{d}_{\mathbf{p}',s'}^\dagger, \quad \check{d}_{\mathbf{k},\alpha} \check{b}_{\mathbf{p}',s'}, \quad \check{d}_{\mathbf{k},\alpha} \check{d}_{\mathbf{p}',s'}. \quad (609)$$

Näistä ensimmäinen hävittää elektronin tilasta  $\mathbf{p}'$ ,  $s'$  ja luo sen tilaan  $\mathbf{p}$ ,  $s$ . Viimeinen tekee saman positronille (vain pilkulliset ja pilkuttomat suureet toisin päin). Toinen termi luo sekä elektronin että positronin. Tätä kutsutaan *parinmuodostukseksi*. Kolmas termi hävittää sekä elektronin että positronin. Tätä kutsutaan *annihilaatioksi*. Yhdessä näitä kaikkia prosesseja (samalla kun fotonin joko syntyy tai tuhoutuu) on tapana kuvata diagrammeilla:



Kuvassa suorat viivat kuvaavat elektronia tai positronia ja aaltoviivat fotonia.

Häiriöteoriassa on laskettava kytkentätermin matriisielementtejä eri alku ja lopputilojen välillä. Osoittautuu että ensimmäisessä kertaluvussa kaikki matriisielementit häviävät koska muuten ne rikkoisivat energian ja liikemäärän säilymlakeja. Toisessa kertaluvussa esiintyy nollasta poikkeavia matriisielementtejä, joita voidaan kuvata seuraavilla diagrammeilla.



Diagrammi (a) kuvaa esimerkiksi prosessia jossa toinen  $\check{H}_{mk}$  luo elektronin jonka toinen  $\check{H}_{mk}$  tuhoaa. Tällaista välitilan hiukkasta kutsutaan *virtuaaliseksi*. Diagrammi (a) kuvaa mm. elektronin ja fotonin välistä sironnata sekä annihilaatiota että parinmuodostusta. Diagrammi (b) kuvaa kahden elektronin (tai positronin) välistä sähkömagneettista vuorovaikutusta.

Diagrammi (c) kuvaa sähkömagneettisen kentän vaikutusta elektronin itsensä ominaisuuksiin. Diagrammi (d) kuvaa virtuaalisesta parinmuodostuksesta johtuvaa vaikutusta fotonin ominaisuuksiin. Korkeammassa kertaluvussa saadaan monimutkaisempia diagrammeja.

Häiriökehityksen kertaluvun  $n$  termien suhteellinen suuruus on arvioilta

$$\left( \frac{e^2}{4\pi c \epsilon_0 \hbar} \right)^{n/2}. \quad (610)$$

Tämä tulee siitä että häiriötermi  $\check{H}_{mk}$  on suoraan verrannollinen  $e$ :hen ja muut tekijät tulevat siitä että termien suhteen tulee olla laaduton luku. ( $e$  on siis luonnonvakio joka kuvaa elektronin ja sähkömagneettisen kentän välistä kytkentää.) Suluissa esiintyvä suure on *hienorakennevakio*

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi c \epsilon_0 \hbar} = \frac{1}{137.03599}. \quad (611)$$

Koska tämä on huomattavasti ykköstä pienempi, on oletettavaa että edellä kuvattu kehityksenä suppenee varsin nopeasti, ja jo edellä mainitut toisen kertaluvun diagrammit antavat hyvän likiarvon edellä mainituille prosesseille.

Tarkastellaan vielä mitä kvanttiteoria sanoo elektronin varauksen jakaumasta. Kommutaattori (542) voidaan tulkita epämääräisyysrelaationa siten että jos mitataan sekä liikemäärä että paikka, on näiden mittaustulosten epämääräisyyksien tulo

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \quad (612)$$

Jos esimerkiksi fotonilla pyritään mittaamaan pituusskaalaa  $\Delta x$ , on fotonin energian oltava vähintään  $\mathbb{E} = cp \approx \hbar c / \Delta x$ .

Nähdään siis että pienten etäisyyksien mittaaminen vaatii suurta energiaa. Kun mitattava pituuskaala on

$$\Delta x = \frac{\hbar}{mc} = \frac{r_0}{\alpha} = 137r_0, \quad (613)$$

on fotonin energia oltava yli  $mc^2$ . Tällaisella energialla tulee virtuaalinen parinmuodostus merkittäväksi [edellä oleva diagrammi (d)]. Sanotaan että tyhjiö polarisoituu elektroni-positroniparien takia. Tämä on jossain määrin samantapaista kuin edellä puhuttiin materian polarisoitumisesta sähkömagneettisessa kentässä.

Tyhjiön polarisoitumisen takia sähkökenttä ei pienemmillä etäisyyksillä kasvakaan enää kuin  $1/r^2$ , vaan paljon hitaammin. Sähkökentän kontribuutio elektronin energiaan näyttää edelleen divergoivan, mutta kvanttikenttäteoriassa tämä divergenssi tulee merkittäväksi vasta niin pienillä etäisyyksillä (tai niin suurilla energioilla) ettei sitä mitenkään koskaan pystytä kokeellisesti tutkimaan. Siis kvanttikenttäteoria jättää elektronin elektromagneettisen ja muun massan suhteen epämääräiseksi lykkäämällä tämän ongelman tavoittamattoman kauaksi.

## 10. Kitka (ei 05)

Tämä kurssi muodostaa kokonaisuuden edeltävän Analyttisen mekaniikan kurssin kanssa. Pääkohteena näissä kurseissa on ollut kuvata ympäröivän maailman *makroskooppisia ominaisuuksia*, joiden kuvailuun klassinen teoria on riittävä. Olemme siis pääsääntöisesti jättäneet pois kaikki mikroskooppiset tarkastelut. Olemme kuitenkin lyhyesti tarkastelleet sitä, että klassinen teoria voidaan yleistää kvanttimekaaniseksi teoriaksi. Näin klassinen teoria antaa pohjan myös mikroskooppisen maailman kuvaukselle, aivan sen kaikkein pienimpiä tunnettuja osia myöten.

Edellä esitetyssä klassisen teorian käsittelyssä on kuitenkin yksi merkittävä puute. Emme ole lähes ollenkaan käsitelleet peruuttamattomia prosesseja, vaan lähes kaikki ilmiöt ovat olleet symmetrisiä ajankäännössä. Esimerkiksi liikekitkan olemassaolo on esimerkki peruuttamattomasta ilmiöstä.

Poikkeuksen tekee lasku säteilyn reaktiivoimasta. Siinä saadaan varauksen liikkeelle kitkavoima. Tämä aiheutuu siitä, että pyrimme eliminoimaan tarkastelusta sähkömagneettisen kentän värähtelyt ja kuvaamaan systeemiä vain varauksen koordinaattien avulla. Tämä on kitkavoimien yleinen ominaisuus: ne ovat efektiivisiä voimia jotka syntyvät siitä, että jätetään pois mikroskooppisia vapausasteita.

Makroskooppisessa teoriassa on usein olennaista ottaa mukaan kitkavoimia. Käytännössä niiden mikroskooppinen laskeminen on usein lähes mahdotonta. Siksi on tarpeen mallintaa kitkavoimia. Seuraavassa muutamia esimerkkejä.

Tarkastellaan johtavaa materiaalia sähkökentässä. Jos ulkoinen kenttä on ajasta riippumaton, ovat sähkövaraukset staattisesti asettuneet niin että sähkökenttä johteen sisällä häviää,  $\mathbf{E} = 0$ . Jos ulkoinen kenttä muuttuu, syntyy johteeseen sekä sähkökenttä että virtoja. Tyypillinen oletus on että virran tiheys riippuu lineaarisesti poikkeamasta tasapainosta,

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (614)$$

(Yleisemmin johde voi olla epäisotrooppinen jolloin  $j_i = \sigma_{ik} E_k$ .) Vakiota  $\sigma$  (tai  $\sigma_{ik}$ ) kutsutaan *sähköjohtavuudeksi*. Tällainen lineaarinen relaatio (Ohmin laki) ilmeisesti on voimassa ainakin silloin kun poikkeama tasapainosta on pieni.

Toinen esimerkki on lämmön johtuminen. Lämpötasapainossa lämpötila  $T$  on vakio. Tällöin myös lämpövirrantiheys  $\mathbf{j}_Q = 0$ . Jos poikkeama tasapainosta on pieni, on ilmeisesti voimassa lineaarinen riippuvuus

$$\mathbf{j}_Q = -\kappa \nabla T, \quad (615)$$

missä vakio  $\kappa$  on *lämmönjohtavuus*.

Huomaa että sekä  $\sigma$  että  $\kappa$  ovat välttämättä positiivisia. Näin on siksi että syntyvien virtojen täytyy palauttaa systeemi tasapainotilaa kohden. Muussa tapauksessa alkuperäinen tasapainotila ei olisi stabiili. Huomaa myös että molemmat relaatiot (614) ja (615) rikkovat

ajankääntösymmetrian. (Vasemmat puolet vaihtavat merkkiä mutta oikeat puolet eivät.)

Yleisemmin sähköjohteen poikkeamista tasapainosta  $\mathbf{E} = \nabla T = 0$  voidaan kuvata yhdistetyllä lineaarisella riippuvuudella

$$\begin{pmatrix} \mathbf{j} \\ \mathbf{j}_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & \alpha \\ \beta & -\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \nabla T \end{pmatrix}. \quad (616)$$

Tilastollisen fysiikan kurssissa johdetaan lisäksi relaatio kertoimien välille niin että matriisissa on vain kolme riippumatonta vakiota.

Viimeisenä esimerkkinä olisin halunnut käsitellä nesteen virtausta. Erityisesti olisi johdettu häviötöntä virtausta kuvaava Eulerin yhtälö (nopeus  $\mathbf{v}$ , tiheys  $\rho$ , paine  $p$ )

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (617)$$

ja sitten olisi johdettu miten dissipatio otetaan lineaarisesti mukaan kahdella viskositeettikertoimella  $\eta$  ja  $\zeta$  ja saadaan *Navier-Stokes-yhtälö*

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (618)$$

katso LL6. Tällä olisi sitten voinut tutkia vaikkapa ääniaaltojen vaimenemista. Valitettavasti tällä kertaa meillä ei ole tähän enää aikaa.

Huomautetaan vielä että tavallisella Lagrangen ja Hamiltonin formalismilla ei voi käsitellä kitkavoimia. (Siis siinä tapauksessa että käytetään vain makroskooppisia vapausasteita.) Kitkavoimat on siten lisättävä vasta liikeyhtälöihin (ei  $L$  tai  $H$  funktioihin), kuten edellä demonstroitiin.

## 11. Lopuksi

Analyttisen mekaniikan kurssissa opittiin ilmaisemaan Newtonin lait käyttäen Lagrangen ja Hamiltonin formalismia. Siellä näitä menetelmiä sovellettiin eri systeemeihin, joissa on muutamia vapausasteita. Lopuksi käsiteltiin lyhyt johdanto kvanttimekaniikkaan.

Tässä kurssissa lähdettiin yleistämään Lagrangen ja Hamiltonin formalismia. Ensin tutkittiin tapausta jossa on suuri määrä vapausasteita ja sitten menttiin jatkumorajalle. Tätä teoriaa sovellettiin sitten pitkälti sähkömagneettisesti vuorovaikuttaviin hiukkasiin. Perusteltiin tämän systeemin vaikutusintegraali kolmessa eri vaiheessa, käyttäen erityisesti hyväksi suhteellisuusteorian vaatimuksia. Vaikutusintegraalista johdettiin Lorentzin voima ja Maxwellin yhtälöt, ja sitä kautta suuri joukko klassisen sähkömagnetismin tuloksia. Lopuksi esitettiin johdatus kvanttielektrodynamiikkaan, ja mainittiin jotain kitkavoimista (ei 05).

Tenttiin valmistautuessa on tärkeintä yrittää ymmärtää fyysiset ideat. Yleistä kaavojen ulkolukua en suosittelen. Kuitenkin seuraavat kaavat on hyvä muistaa ulkoa

- Lagrangen yhtälö sekä jatkuvassa että diskreetissä tapauksessa
- Maxwellin yhtälöt kolmivektorimuodossa
- sähkö- ja magneettikentän esitys potentiaalien avulla
- Lorentzin voima
- sähkömagneettisen kentän energiatiheys ja Poyntingin vektori
- jatkuvuusyhtälö