KAAVAKOKOELMA

Hermitén polynomien perusominaisuuksia:

1. Differentiaaliyhtälö: $H_n''(\xi) - 2\xi H_n'(\xi) + 2nH_n(\xi) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
2. Ortonormaalisuus: $\int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi)H_m(\xi)e^{-\xi^2}d\xi = \delta_{mn}2^n n!\sqrt{\pi}$
3. Rodriquesin kaava: $H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}e^{-\xi^2}$
4. Palautuskaavat: $H_n'(\xi) = 2nH_{n-1}(\xi)$; $\quad H_{n+1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2nH_{n-1}(\xi)$
5. Muodostaja- eli generoiva funktio: $e^{-s^2+2s\xi} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(\xi)}{n!}s^n$

Yksidimensioisen harmoonisen oskillaattorin normitetut aaltofunktiot yksiköissä, $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$,

$$\psi_n(x) = \mathcal{N}_n H_n(\xi)e^{-\frac{1}{2}\xi^2}; \quad \mathcal{N}_n = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar}}\sqrt{\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}}$$

Laplace operaattori pallokoordinaatistossa

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

Legendren polynomien perusominaisuuksia:

1. Differentiaaliyhtälö: $(1 - z^2)P_\ell''(z) - 2zP_\ell'(z) + \ell(\ell+1)P_\ell(z) = 0$
2. Ortogonaalisuus: $\int\limits_{-1}^{1} P_\ell(z)P_k(z)dz = \int\limits_{0}^{\pi} P_\ell(\cos\theta)P_k(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell k}$
3. Rodriguesin kaava: $P_\ell(z) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dz^\ell}(z^2-1)^\ell$
4. Symmetria: $P_\ell(-z) = (-1)^\ell P_\ell(z)$
5. Palautuskaava: $(\ell+1)P_{\ell+1}(z) - z(2\ell+1)P_\ell(z) + \ell P_{\ell-1}(z) = 0$
6. Alimman kertaluvun polynomeja:

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z, \quad P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1)\ , \ \text{jne.}$$

Assosioitujen Legendren funktioiden ominaisuuksia:

1. Määritelmä, kun $m \geq 0$: $P_\ell^m(z) = (1 - z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}P_\ell(z)$
2. Määritelmä, kun $|m| \leq \ell$: $P_\ell^m(z) = \frac{1}{2^\ell \ell!}(1 - z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{\ell+m}}{dz^{\ell+m}}(z^2-1)^\ell$

3. Differentiaaliyhtälö: $(1-z)^2\frac{d^2}{dz^2}P_\ell^m(z) - 2z\frac{d}{dz}P_\ell^m(z) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right)P_\ell^m(z) = 0$

4. Ortogonaalisuus: $< P_\ell^m | P_{\ell'}^m >= \int\limits_{-1}^{1} P_\ell^m(z)P_{\ell'}^m(z)dz = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell\ell'}$

5. Kvanttiluvun m merkin vaihto: $P_\ell^{-m}(z) = (-1)^m\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}P_\ell^m(z)$

6. Symmetria: $P_\ell^m(-z) = (-1)^{\ell+m}P_\ell^m(z)$

7. Arvo pisteessä $z=1$: $P_\ell^m(1) = \delta_{m0}$

8. Palautuskaavat: $(2\ell+1)\ t\ P_\ell^m(t) = (\ell+m)P_{\ell-1}^m(t) + (\ell-m+1)P_{\ell+1}^m(t)$
   ja $(2\ell+1)\sqrt{1-t^2}P_\ell^{m-1}(t) = P_{\ell+1}^m(t) - P_{\ell-1}^m(t)\,,$

Pallofunktioiden tärkeimmät ominaisuudet:

1. Määritemä: $Y_m^\ell(\theta,\varphi) \equiv \sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}(-1)^m e^{im\varphi}P_\ell^m(\cos\theta)$

2. Kompleksikonjugaatti: $Y_m^{*\ell}(\theta,\varphi) = (-1)^m Y_{-m}^\ell(\theta,\varphi)$

3. Ortogonaalisuus: $< Y_{m'}^{\ell'} | Y_m^\ell >= \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{m'}^{*\ell'}(\theta,\varphi)Y_m^\ell(\theta,\varphi) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$

4. Arvo pisteessä $\theta=0$: $Y_m^\ell(0,\varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\delta_{mo}$

5. Summakaava: merkintä $\hat{r}$ viittaa vektorin $\vec{r}$ suuntaiseen yksikkövektoriin.
   $P_\ell(\hat{r}'\cdot\hat{r}) = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum\limits_{m=-\ell}^{\ell} Y_m^{*\ell}(\hat{r}')Y_m^\ell(\hat{r})$

Harmoonisen oskillaattorin aaltofunktio pallokoordinaateissa:

$\psi_{N\ell m}(r) = \mathcal{N}_{N\ell}e^{-\frac{r^2}{2}}r^\ell L_n^{\ell+\frac{1}{2}}(r^2)Y_m^\ell(\theta,\varphi)\,,;\quad \mathcal{N}_{N\ell} = \sqrt{\frac{2(n!)}{\Gamma\left(n+\ell+\frac{3}{2}\right)}}$

Vetyatomin aaltofunktio pallokoordinaateissa:

$\psi_{n\ell m}(\vec{r}) = \frac{1}{r}u_{n,\ell}(r)Y_m^\ell(\theta,\varphi);\quad u_{n\ell}(r) = \mathcal{N}_{n\ell}\ r^{\ell+1}\ e^{-\frac{r}{n}}\ L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}\left(\frac{2r}{n}\right);\quad \mathcal{N}_{n\ell} = \sqrt{\frac{(n-\ell-1)!}{\Gamma(\ell+n+1)2n}\left(\frac{2}{n}\right)^{2\ell+3}}$

Laguerren polynomien ominaisuuksia:

1. Differentiaaliyhtälö: $xL_k^{''\alpha}(x) + (\alpha+1-x)L_k^{'\alpha}(x) + kL_k^\alpha(x) = 0$

2. Rodriguesin kaava: $L_n^\alpha(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha})$

3. Muodostajafunktio: $\frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}}e^{\frac{xz}{z-1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x)z^n$

4. Palautuskaavat: $(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) = (2n+\alpha+1-x)L_n^\alpha(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x)$
   ja $xL_n^{\alpha+1}(x) = (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) - (n-x)L_n^\alpha(x)$

5. Ortogonaalisuus: $\int\limits_0^\infty e^{-t}t^\alpha L_n^\alpha(t)L_{n'}^\alpha(t)dt = \delta_{nn'}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}$

Vektorilaskennan kaavoja

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times (\vec{U} \times \vec{V}) &= \vec{U}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} - \vec{V}(\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) - (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} \\
(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} &= \vec{A} \\
(\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}(\vec{r}) &= r\frac{\partial \vec{A}(\vec{r})}{\partial r} \\
(\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\phi(\vec{r}) &= r\frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial r} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{r} &= 3
\end{aligned}$$

Trigonometrian kaavoja

$$\begin{aligned}
\sin i\kappa a &= i \sinh \kappa a \\
\cos i\kappa a &= \cosh \kappa a \\
\cosh^2 \kappa a &- \sinh^2 \kappa a = 1
\end{aligned}$$

Besselin ja Neumannin funktiot

$$\text{(Bessel)} \qquad j_\ell(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} \; J_{\ell+\frac{1}{2}} \; (\rho)$$

$$\text{(Neumann)} \quad \mathrm{n}_\ell(\rho) = (-1)^{\ell+1} \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} \; \mathrm{J}_{-\ell-\frac{1}{2}}(\rho)$$

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \;\; \Gamma(k+n+1)} \quad \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

Kun $\rho \to 0$

$$\begin{aligned}
J_n(\rho) &\approx \frac{1}{2^n} \; \frac{\rho^n}{\Gamma(n+1)} \\
j_\ell(\rho) &\approx \frac{2^\ell \;\; \ell!}{(2\ell+1)!}\rho^{\;\;\ell} \\
n_\ell(\rho) &\approx D_\ell \rho^{-\ell-1}
\end{aligned}$$

Kun $\rho \to \infty$

$$\begin{aligned}
j_\ell(\rho) &\sim \frac{1}{\rho} \sin\left(\rho - \frac{\ell\pi}{2}\right) \\
n_\ell(\rho) &\sim \frac{1}{\rho} \cos\left(\rho - \frac{\ell\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Besselin ja Neumannin funktioiden ominaisuuksia

Rayleigh'n kaavat:

$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{d}{xdx}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$n_n(x) = -(-1)^n x^n \left(\frac{d}{xdx}\right)^n \left(\frac{\cos x}{x}\right)$$

Palautuskaava:

$$j_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} j_n(x) - j_{n-1}(x)$$

Alimman kertalun funktioiden esityksiä

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_1(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}$$
$$j_2(x) = \frac{3}{x} j_1(x) - j_0(x)$$
$$n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}, \quad n_1(x) = -\frac{\cos x + x\sin x}{x^2},$$
$$n_2(x) = \frac{3}{x} n_1(x) - n_0(x)$$

Vapaan hiukkasen Schrödingerin yhtälön ratkaisu pallokoordinaateissa

$$\Rightarrow \quad \psi_\ell^m(\boldsymbol{r}) = A_\ell \; j_\ell(kr) Y_m^\ell(\hat{r}) + B_\ell \; n_\ell(kr) Y_m^\ell(\hat{r})$$

Gamma-funktio

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$
$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$
$$\Rightarrow \qquad \Gamma(1+\ell+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \;\; \frac{(2\ell+1)!!}{2^{\ell+1}}.$$

Tasoaallon kehittäminen pallofunktioiden avulla

$$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell \;\; j_\ell(kr) \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_m^{\ell *}(\hat{k}) Y_m^\ell(\hat{r})$$
$$e^{ikz} = \sum_\ell (2\ell+1) \; i^\ell \; j_\ell(kr) \; P_\ell(\cos\theta)$$

Integraaleja

$$\frac{4\pi}{K} \int_0^\infty \frac{rdr}{(a\sqrt{\pi})^3} \; e^{-\frac{r^2}{a^2}} \; \sin Kr = e^{-\left(\frac{Ka}{2}\right)^2}$$

Kulmaliikemäärän nostamis- ja laskemisoperaattori

$$L_{\pm}\psi^{\ell}_{m} = \sqrt{(\ell \mp m)\ (\ell \pm m + 1)}\ \psi^{\ell}_{m\pm 1}$$

Yksidimensionen harmooninen oskillaattori

$$a = \frac{i}{\sqrt{2}}(p_{\text{op}} - i x_{\text{op}}) \qquad \text{hävittämisoperaattori}$$

$$a^{\dagger} = \frac{-i}{\sqrt{2}}(p_{\text{op}} + i x_{\text{op}}) \qquad \text{luomisoperaaattori}$$

Nämä operaattorit toteuttavat seuraavat ominaisuudet:

1. $[a, a^{\dagger}] = 1$
2. $H = \frac{1}{2}(a^{\dagger}a + aa^{\dagger})$
3. $[a, H] = a$
4. $[a^{\dagger}, H] = -a^{\dagger}$