Johdatus kvanttikenttäteoriaan

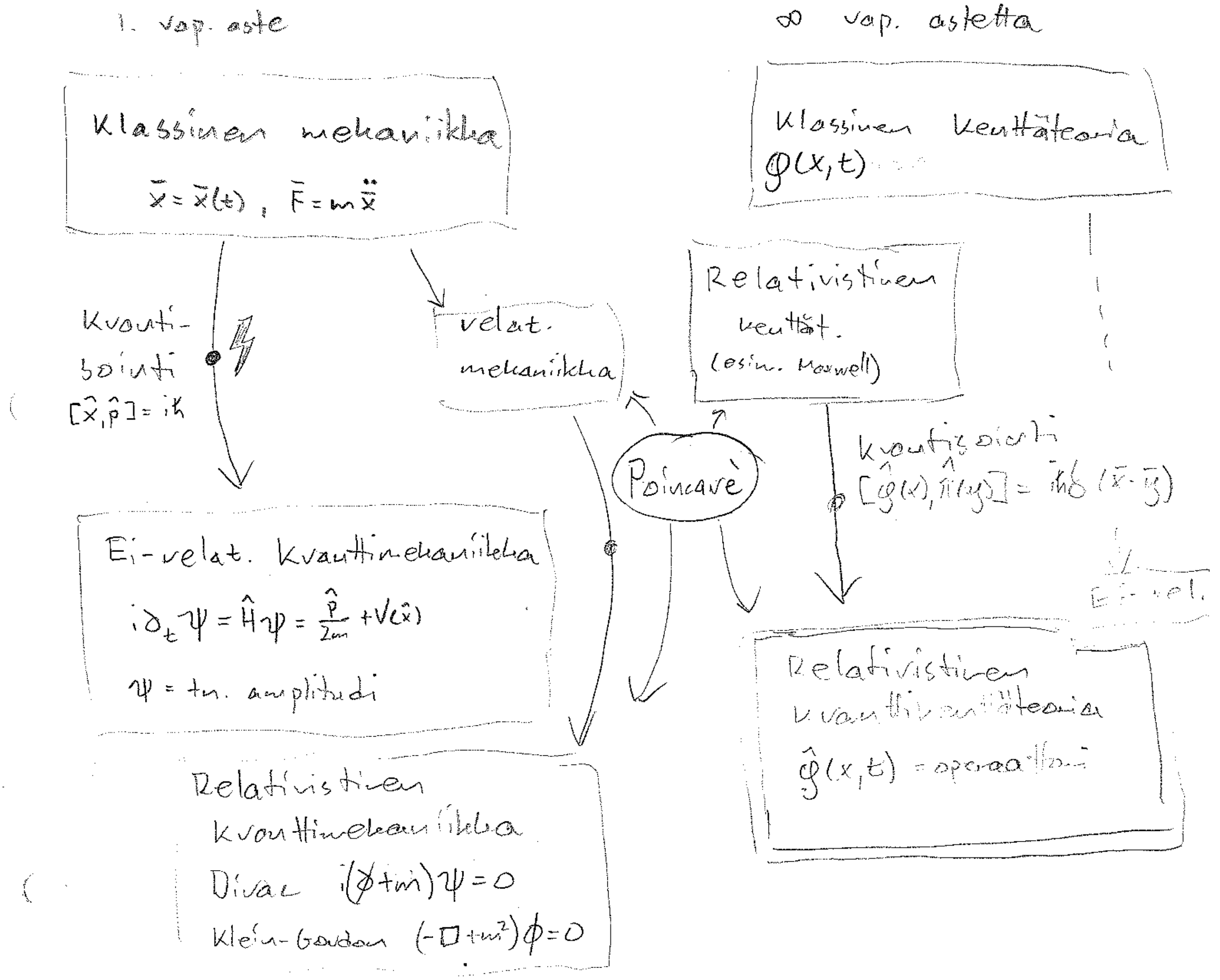
13.10 - 31.10 2003

MA	10-12	HARJOITUKSET
TI	14-16	
TO	10-12	
PE	10-12	

- 1. Klassiset kentät ja Poincare-invarianssi
- 2. Kenttäteorian perusteet
  - Hamiltonin formalismi, $\hat{H}$, $[\hat{\varphi}, \hat{\pi}] = i(\hbar)\,\delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{y})$
  - Propagaattori
  - Polkuintegraali
  - Feynmanin säännöt $\lambda\varphi^4$ 
- 3. $\lambda\varphi^4$ regularisointi ja renormalisointi
  - impulssiregularisaatio
  - dimensionaalinen regularisaatio
- 4. QED
  - polkuintegraalit fermioneille
  - mittakentät

5. QCD (?)

Kvanttikenttä (Relativistinen) = kvanttimekaniikka + kenttäteoria + erityinen suhteellisuusteoria



- Kvantisointi voidaan tehdä 2 tavalla:
  - $[\ ,\ ] = i\hbar$ ... kanoninen kvantisointi (operaattorit, Fock-avaruus)
  - $\sum_{\text{"polut"}} e^{iS[\phi]}$ polkuintegraali (Feynman)
- kvanttikenttäteoria: perusväline hitufysiikassa

1.1. Miksi kvanttikenttäteoria?

- Relativistinen 1-hiukkasmekaniikka ei toimi
- hiukkas-antihiukkasgeneraatio, vakuumifluktuaatiot (casimir-efekti)
- Kausaliteetti (+ Poincaré -invarianssi) vaatii kvanttikenttäteorian: $\hat{x}$ "alennetaan" tavalliseksi koordinaatiksi (parametri). (Palataan myöhemmin)

1.2 Yksiköt

- hitufysiikan standardiyksiköt: $\boxed{\hbar = c = 1}$ $\quad [c] = \frac{m}{s}$ $\quad [\hbar] = \frac{kg \cdot m^2}{s}$

  $[\text{pituus}] = [\text{aika}] = [\text{energia}]^{-1} = [\text{massa}]^{-1}$

- Tavallisesti vastaukset: $(\text{GeV})^n$ tai $(\text{fm})^{-n}$

  Muunnos: $0.2\ \text{GeV} = 1/\text{fm}$

  Tai, "normaaleissa" yksiköissä $0.2\ \text{GeV} \cdot \left(\frac{1}{\hbar c}\right) = \frac{1}{\text{fm}}$

- Normaalit yksiköt saadaan lisäämällä tarpeellinen määrä $\hbar, c$.
- Joskus on valaisevaa kirjoittaa $\hbar$ eksplisiittisesti, vaikka dimensiottomana. $\hbar \to 0 \Rightarrow$ klassinen fysiikka.

1.3. Poincare - invarianssi = Lorentz + translaatiot

(rotaatio Minkowskin metriikassa)

A. • Rotaatioryhmä $SO(1,3)$ = Lorentz-muunnokset

Säilyttää vektorin pituuden

$$x^2 = x_\mu x^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = (x^0)^2 - \bar{x}^2$$

Metrinen tensori $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$ ← aika $\mu = 0$; 3-avaruus $\mu = 1,2,3$

Huom. $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$; $\eta_\mu{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu$

$$x \cdot y = x_\mu y^\mu = x^\mu y_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$$
$$= x^0 y^0 - \bar{x} \cdot \bar{y} = x^0 y^0 - x^i y^j$$

Siis $\mu, \nu, \ldots = (0,1,2,3)$; $i, j, k \ldots = (1,2,3 \ldots)$.
$x^\mu = (x^0, \bar{x})$, $x_\mu = (x^0, -\bar{x})$

- Lorentz-muunnos

$$x^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad ; \quad x^2 \to \underbrace{g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta}_{g_{\alpha\beta}} x^\alpha x^\beta = x^2.$$

Esim. pusku z-aks. suuntaan

$$x^0 \to \frac{x^0 - v x^3}{\sqrt{1-v^2}} \quad ; \quad x^3 \to \frac{x^3 - v x^0}{\sqrt{1-v^2}} \quad , \quad x^{1,2} \to x^{1,2}$$

$$x^2 \to x^2$$

- Generaattorit $\Lambda = e^{iM}$, esitys

$$M_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$$

$M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ ⇒ 6 operaattoria;

3 puskua + 3 rotaatiota

Huom! $M_{ij} = i(x_i \partial_j - x_j \partial_i) = i \epsilon_{ijk} \underbrace{(\bar{x} \cdot \nabla)_k}_{i\bar{L}}$.

B. <u>Translaatiot</u> $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$

Generaattori $p_\mu = -i \partial_\mu$

$$\begin{cases} [M_{\mu\nu}, p_\rho] = -i \eta_{\mu\rho} p_\nu + i \eta_{\nu\rho} p_\mu \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i\left(-\overset{\eta_{\mu\rho}}{\cancel{g_{\mu\rho}}} M_{\nu\sigma} + (\mu\sigma\nu\rho) - (\nu\sigma\mu\rho) + (\nu\rho\mu\sigma)\right) \\ [p_\mu, p_\nu] = 0 \end{cases}$$

= <u>Lie algebra</u> Poincaren muunnoksille

- <u>Casimir-operaattori</u>: kommutoi $\forall$ algebran elementtien kanssa

  $\underline{p_\mu p^\mu}$; $\underline{W_\mu W^\mu}$, $W_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\nu M^{\rho\sigma}$

  Pauli-Lubenski vektori

- Siis tiloja labeloivat ominaisarvot (massa^2, spin)

$$\begin{cases} p_\mu p^\mu |m, s\rangle = m^2 |m, s\rangle \qquad m^2 \geq 0 \quad \text{massa!} \\ \qquad (p_\mu p^\mu = p_0 p^0 - \bar{p}^2 = E^2 - \bar{p}^2 = m^2) \\ W_\mu W^\mu |m, s\rangle = -m^2 s(s+1) |m, s\rangle \end{cases}$$

eivät muutu Lorentz-muunnoksissa

Kvanttikenttäteoria on

- lokaali $\varphi = \varphi(x,t)$
- Poincare-invariantti

Huom:

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \quad (\det \Lambda^{\alpha}{}_{\beta})^2 = 1 \quad \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1$$

$\det \Lambda = +1$ "proper orthochronous" Lorentz-ryhmä

= jatkuvasti yhdistettävissä $\Lambda = 1$
(siis tavalliset pushut + rotaatiot)

$\det \Lambda = -1$: sisältää ajan- tai paikan käännön

$$P^{\alpha}{}_{\beta} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$$

$$T^{\alpha}{}_{\beta} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$$

L. 1

1.4 Vaikutus = aktio

- lähtökohta polkuintegraalimenetelmälle

- Klassinen dynamiikka = liikeyhtälöt
  esim. aaltoyhtälö
  $$(\Box^2 + m^2)\varphi(x) = 0 \qquad \Box = \partial_\nu \partial^\nu \qquad (1.1)$$

- Vaikutus = funktionaali jonka ekstremaali antaa klassiset liikeyhtälöt:
  $$S[\varphi] = \int d^4x \, \mathcal{L}(\varphi, \partial_\nu \varphi) \qquad (1.2)$$
  ↑
  Lagrangen tiheys, Lorentz-skalaari

Vaadimme:

1) $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$ todennäköisyyden säilyminen (unitaarisuus; vrt. Im V = absorptio)

2) liikeyhtälöissä max. 2 derivaattaa
   muutoin saamme ei-kausaalisia ratkaisuja
   (jos muuten vaaditaan Lorentz-invarianssi)

Variaatiomenetelmä :

reunaehdot! $\varphi(t=\tau_1)$ jne.

$$\delta S[\varphi] = 0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \; \delta\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$$

$$= \int d^4x \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi} \delta\varphi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\varphi)} \underbrace{\delta(\partial_\mu \varphi)}_{\partial_\mu \delta\varphi} \right]$$

$$\delta(\partial \varphi(x)) = \delta \frac{\varphi(x+a) - \varphi(x)}{a} = \frac{\delta\varphi(x+a) - \delta\varphi(x)}{a} = \partial\, \delta\varphi(x)$$

$$= \int d^4x \; \delta\varphi \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi} - \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\varphi)} \right]$$

$$+ \underbrace{\int d^4x \; \partial_\mu \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\varphi)} \delta\varphi \right]}_{\oint_\sigma d\sigma_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\varphi)} \cdot \delta\varphi}$$

Vaaditaan $\delta\varphi = 0$ pinnalla σ (joko $\to \infty$ tai kiinteät reunat). Koska $\delta\varphi$ on muuten mielivaltainen $\Rightarrow$

$$\delta S[\varphi] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi} - \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\varphi)} = 0} \qquad (1.3)$$

Euler-Lagrangen yhtälöt.

- φ:llä voi olla mitä tahansa indeksejä (Lorentz, mittaryhmä etc.)

Esim. <u>skalaarikenttä</u>:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - V(\varphi) \quad = \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{"kin." energia}}}{T} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{potentiaali}}}{V} \qquad (1.4)$$

missä V on skalaarifunktio.
(4d:ssä tavallisesti V:n aste ≤ 4)

Liikeyhtälö:
$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \varphi)} = -V'(\varphi) - \partial_\mu \partial^\mu \varphi = 0$$

Tästä siis saadaan aaltoyhtälö (Klein-Gordon) jos $\underline{V(\varphi) = \frac{1}{2} m^2 \varphi^2}$

(1.4) yleistyy helposti N-komponenttikentälle φ^a, $a = 1..N$

$$\mathcal{L} = \sum_a \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi^a)(\partial^\mu \varphi^a) - V(\bar{\varphi}) \qquad (1.5)$$

Jos $V = V(\sum_a \varphi^a \varphi^a)$, vaikutus on $O(N)$ symmetrinen (siis invariantti muunnoksissa $\varphi \to M\varphi$, missä M on $N \times N$ rotaatiomatriisi, $M^T M = 1$).

Jos $N=2$, niin voimme tarkastella <u>kompleksikenttää</u> $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi^1 + i\varphi^2)$:

$$\underline{\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - V(\Phi, \Phi^*)} \qquad (1.6)$$

Tavan mukaan kompleksikentillä ei ole tekijää $\frac{1}{2}$ derivaatan edessä.

1.5 Vaikutuksen invarianssi $\rightarrow$ säilyvä (Noether) virta.

Olkoon $\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$ muunnos mikä jättää vaikutuksen invariantiksi.

Nyt $\delta S = 0 = \int d^4x \, \delta\mathcal{L}$, joten pitää olla $\delta\mathcal{L} = \partial_\nu b^\nu$ ← jokin vektori

jotta liikeyhtälöt eivät muuttuisi. Usein $\delta\mathcal{L} = 0 \Rightarrow b^\nu = 0$

Siis
$$\delta\mathcal{L} = \partial_\nu b^\nu = \underbrace{\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi}}_{\text{liikeyht.} = \partial_\nu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\nu\varphi)}} \delta\varphi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\nu\varphi)} \partial_\nu \delta\varphi = \partial_\nu \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\nu\varphi)} \delta\varphi \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{j^\nu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\nu\varphi)} \delta\varphi - b^\nu} \qquad (1.7)$$

on säilyvä virta,

Siis $\partial_\nu j^\nu = 0$. j^0 (säilyvä) varaustiheys

$$\partial_0 j^0 + \partial_i j^i = \partial_t j^0 - \bar{\nabla} \cdot \bar{j} = 0$$

$$Q = \int_V d^3\bar{x} \, j^0 = \text{varaus, vakio, jos } \oint_V d\bar{a} \cdot \bar{j} = 0.$$

Huom! j^ν:n normalisuuskerrointa ei määrätty!

Esim. Kompleksikentän Φ vaikutus (1.6)
on invariantti muunnoksessa ($V = V(\Phi^*\Phi)$)

$$\Phi \Rightarrow e^{i\theta}\Phi$$

(selvää).

Nyt δS (ja $\delta \mathcal{L}$) ovat $= 0$.

Virta:

$$j^\mu \propto \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \Phi)} \underbrace{\delta\Phi}_{i\theta\Phi} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \Phi^*)} \underbrace{\delta\Phi^*}_{-i\theta\Phi^*}, \quad \theta \text{ infinit.}$$

$$\Rightarrow \quad j^\mu = \underline{i\left[(\partial^\mu \Phi^*)\Phi - (\partial^\mu \Phi)\Phi^*\right]} \qquad (1.8)$$

(vakio edessä mielivaltainen, tässä θ pudotettiin)

j^μ sähkövaraus/virta, kun Φ kytketään sähkömagneettiseen kenttään.

$Q = \int_V d^3\bar{x}\, j^0$ = sähkövaraus tilavuudessa V.

$\partial_0 Q = 0$, jos $\oint_V d\bar{a} \cdot \bar{j} = 0$ (tahi vaan $\bar{j} = 0$ reunalla)

Invarianssi translaatioissa $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$

$\to$ energia-impulssitensori

$$\varphi(x) \to \varphi(x+a) = \varphi(x) + a^\mu \partial_\mu \varphi + \mathcal{O}(a^2)$$

$$\partial_\mu \varphi(x) \to \partial_\mu \varphi(x+a) = \partial_\mu \varphi(x) + a^\nu \partial_\mu \partial_\nu \varphi + \ldots \qquad \text{(skalaari)}$$

Tässä tapauksessa $\delta \mathcal{L} \neq 0$ yleensä. Koska $\mathcal{L}$ on skalaari, $\mathcal{L}(x+a) = \mathcal{L}(x) + a^\mu \underbrace{\partial_\mu \mathcal{L}}_{} + \mathcal{O}(a^2)$

$$\partial_\mu (a^\mu \mathcal{L}) = \partial_\mu b^\mu$$

Siis säilyvä virta $j^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi - b^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \varphi)} a^\nu \partial_\nu \varphi - a^\nu g_\nu{}^\mu \mathcal{L}$

Koska a^ν:t ovat riippumattomia, tässä on siis 4 virtaa.

Siis

$$\boxed{\Theta^{\mu\nu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \varphi)} \partial^\nu \varphi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}} \qquad (1.9)$$

on säilyvä virta, energia-impulssitensori $\underline{\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0}$.

Siis vielä kerran:

$$\delta \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x+a) - \mathcal{L}(x) = a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = \partial_\mu (a^\mu \mathcal{L})$$

$$= \underbrace{\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi}}_{\overset{\text{LY:}}{=} \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \varphi)}} \delta\varphi + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \varphi)} \underbrace{\delta(\partial_\mu \varphi)}_{\partial_\mu \delta\varphi} = \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \varphi)} \underbrace{\delta\varphi}_{a^\nu \partial_\nu \varphi} \right]$$

$$\Rightarrow a^\nu \partial_\mu \underbrace{\left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi - \eta^\mu{}_\nu \mathcal{L} \right]}_{\Theta^\mu{}_\nu} = 0$$

$$p^\mu = \Theta^{\mu 0} \quad ; \quad p^0 = \Theta^{00} = \text{energiatiheys}$$

$$\Theta^{ii} = \text{paine} \quad ; \quad \Theta^{ij} = \text{leikkausjännitys}$$

$\partial_\mu p^\mu = 0$, siis energia säilyy

Jos meillä on $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - V(\varphi)$

$$\Rightarrow E = \Theta^{00} = \frac{1}{2}(\partial_0 \varphi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_i \varphi)(\partial^i \varphi) + V(\varphi)$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_0 \varphi)^2 + \frac{1}{2}(\bar{\nabla} \varphi)^2 + V(\varphi)$$

Jos V on alhaalta rajoitettu, E:llä on minimi.

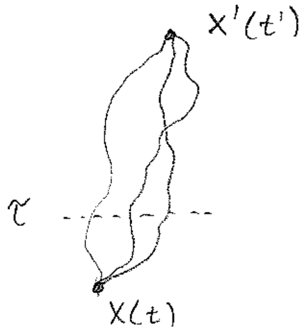
1.6. Johdatusta polkuintegraaliin

Kvanttimekaaninen <u>amplitudi</u> voidaan laskea polkuintegraalina, ilman $|\,\rangle$-tiloja!

- Aikaevoluutio $\quad |\bar{x}(t)\rangle = e^{i\hat{H}t}|\bar{x}\rangle$
- Amplitudi $\quad \langle \bar{x}'(t')|\bar{x}(t)\rangle = \langle \bar{x}'|e^{i\hat{H}(t-t')}|\bar{x}\rangle$

$$= \int \Big[\prod_{t<\tau<t'} dx(\tau)\Big]\, e^{\frac{i}{\hbar} S[\bar{x}]} \qquad (1.10)$$

on summa yli kaikkien polkujen pisteestä $\bar{x}(t)$ pisteeseen $\bar{x}'(t')$ painotettuna $e^{iS/\hbar}$:lla:



Osoitetaan tämä: olkoon $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$

Infinitesimaalisesti

$$\langle \bar{x}'(t+\delta t)|\bar{x}(t)\rangle = \langle \bar{x}'|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\delta t}|\bar{x}\rangle$$

$$\simeq \langle \bar{x}'|\underset{\uparrow \mathbb{1}\text{-operaattori}}{(}1 - \tfrac{i}{\hbar}\delta t \hat{H})|\bar{x}\rangle \quad + \mathcal{O}(\delta t^2)$$

$$= \langle \bar{x}'|\int d^3p\, |\bar{p}\rangle\langle \bar{p}|\,\Big(1 - \tfrac{i}{\hbar}\delta t\Big[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})\Big]\Big)\,|\bar{x}\rangle$$

Huom! $\langle a|\hat{O}|b\rangle = \langle \hat{O}^{+}a|b\rangle = \langle a|\hat{O}b\rangle$,
nyt $\hat{x}^{+} = \hat{x}$, $\hat{p}^{+} = \hat{p}$.

$$f(\hat{x})|\bar{x}\rangle = f(\bar{x})|\bar{x}\rangle$$

$$\langle \bar{x}|\bar{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\bar{x}\cdot\bar{p}/\hbar}$$

Jatkuu...

$$= \int d^3p \left(1 - \frac{i}{\hbar}\delta t\left[\frac{p^2}{2m} + V(x)\right]\right) \underbrace{\langle \bar{x}'|\bar{p}\rangle\langle \bar{p}|\bar{x}\rangle}_{\frac{1}{(2\pi)^3} e^{i\bar{p}(\bar{x}'-\bar{x})/\hbar}}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\bar{p}\cdot(\bar{x}'-\bar{x}) - \frac{i}{\hbar}\delta t\left[\frac{p^2}{2m} + V(x)\right]\right] + \mathcal{O}(\delta t^2)$$

Nyt $\bar{x}' - \bar{x} = \delta t\, \dot{\bar{x}} + \mathcal{O}(\delta t^2)$, joten

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\frac{\delta t}{2m}(\bar{p} - m\dot{\bar{x}})^2 + \frac{i}{\hbar}\delta t \frac{m}{2}\dot{\bar{x}}^2 - \frac{i}{\hbar}\delta t V(x)\right]$$

$p_i \to \ell_i = p_i\left(\frac{i\delta t}{\hbar 2m}\right)^{1/2}$, integroidaan formaalisti

$$= \underline{\left(\frac{m\hbar}{i\pi\delta t}\right)^{3/2} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\delta t\left(\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{\bar{x}}^2 - V(\bar{x})}_{\mathcal{L}}\right)\right]} \qquad (1.11)$$

$\mathcal{L} = \dot{\bar{x}}\cdot\bar{p} - H$ kanon. relaatio
$=$ kin- pot. energia

$$= (\;)^{3/2} \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_{t,t+\delta t}\right]$$

19.10 ↗

Äärellinen Δt saadaan kun jaetaan väli N osaan, $N \to \infty$:

$$\langle x'(t')|x(t)\rangle = \int \left[\prod_{i=1}^{N-1} dx_i\right] \langle x'(t')|x_{N-1}\rangle\langle x_{N-1}|x_{N-2}\rangle \ldots$$

$$\ldots \langle x_2|x_1\rangle\langle x_1|x(t)\rangle$$

missä $t_i = t + \delta t \cdot i$, $\delta t = \dfrac{t-t'}{N}$, ja $|x_i\rangle = |x(t_i)\rangle$.

Siis $\langle x'(t')|x(t)\rangle =$

$$= \int \left[\prod_{i=1}^{N-1} dx_i\right] \left(\frac{m\hbar}{i\pi\,\delta t}\right)^{3N/2} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_i \delta t\left(\tfrac{1}{2}m\dot{\bar{x}}_i^2 - V(\bar{x}_i)\right)\right]$$

$$\boxed{= \int Dx \, \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} dt\, \mathcal{L}(x(t))\right]}, \qquad (1.12)$$

kun $N \to \infty$ $(\delta t \to 0)$.

- Normalisaatiosta ei tavallisesti välitetä, sitä paitsi se on ∞ kun $\delta t \to 0$! ("regularisaatio")
- Entä jos halutaan $\langle \psi_2(t')|\psi_1(t)\rangle$? HT.
- $\hbar \to 0$: eksponentti oskilloi rajusti. Integraali kontribuoi vain $x(t)$-radan lähellä missä $\dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta x(t)} = 0$ $\Rightarrow$ klassiset LY:t! (stationaarinen vaihe)

1.7. Funktionaalimenetelmiä jne.

Polkuintegraaleissa (kenttäteorioissa) tarvitsemme usein Gaussista integraalia:

$$F[A,\omega] = \int \left[\prod_1^N dx_i\right] e^{-x^T A x + \omega^T x} \tag{1.13}$$

Tässä A on $N\times N$ (reaalinen, symmetrinen) matriisi ja ω ja x ovat N-komp. vektoreita.

Täydennetään $\square$-ksi

$$x^T A x - \omega^T x = (x - \tfrac{1}{2}A^{-1}\omega)^T A (x - \tfrac{1}{2}A^{-1}\omega) - \tfrac{1}{4}\omega^T A^{-1}\omega$$

sijoitus: $x' = x - \frac{1}{2}A^{-1}\omega$; $\prod_i dx_i' = \left\|\frac{dx'}{dx}\right\| \prod dx_i = \prod_i dx_i$

$$\Rightarrow F[A,\omega] = e^{-\frac{1}{4}\omega^T A^{-1}\omega} \int \left[\prod_i dx_i'\right] e^{-x'^T A x'}$$

Diagonalisoidaan A: $A_D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_N)$

$$= R^T A R \qquad R^T R = 1$$

sijoitus: $y = R^T x'$; $y^T = x^T R$

$$\prod_i dy_i = \left\|\frac{dy}{dx}\right\| \prod_i dx_i = |\det R^T| \prod_i dx_i \overset{1}{=} \prod_i dx_i$$

$$\Rightarrow F[A,\omega] = e^{-\frac{1}{4}\omega^T A^{-1}\omega} \int \left[\prod_i dy_i\right] e^{-y^T A_D y}$$

$$= e^{-\frac{1}{4}\omega^T A^{-1}\omega} \prod_i \underbrace{\int dy_i\, e^{-\lambda_i y_i^2}}_{\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}}} = e^{-\frac{1}{4}\omega^T A^{-1}\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(A,\omega) = \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{\prod_i \lambda_i}}\; e^{-\frac{1}{4}\omega^T A^{-1}\omega}$$

$$\boxed{= (2\pi)^{N/2} (\det A)^{-1/2}\, e^{-\frac{1}{4}\omega^T A^{-1}\omega}} \qquad (1.\ 14)$$

Tämä edellyttää että $\lambda_i > 0\ \forall i$. Itse asiassa tämä yleistyy, riittää että $\mathrm{Re}\,\lambda_i \geq 0$, ja $\lambda_i \neq 0$. Kenttäteoriassa usein λ_i puhtaasti imaginaarisen.

Tarvitsemme myös <u>funktionaaleja</u> = funktioita joiden argumenttina on funktio.

Esim. $F_1[f] = \int dx\, f(x)$ $\in \mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$, <u>luku</u>

$F_2[f(x)] = f^2(x) - f(x)$ <u>funktio</u>

<u>Funktionaalideriivaatta</u> määritellään δ-funktio -variaationa:

$$\frac{\delta E[f]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\Big[E[f(x) + \epsilon\,\delta(x-y)] - E[f(x)]\Big] \qquad (1.15)$$

Esim. $$\frac{\delta F_1[f]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left[\int dx\,[f(x)+\epsilon\delta(x-y)] - \int dx\, f(x)\right] = 1 \quad (!)$$

$$\frac{\delta F_2[f(x)]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\Big[(f(x)+\epsilon\,\delta(x-y))^2 - f(x) - \epsilon\,\delta(x-y) - f^2(x) + f(x)\Big] = \underline{(2f(x)-1)\,\delta(x-y)}$$

Tai vaihtoehtoisesti (ja matemaattisemmin), voimme tulkita funktion f operaattoriksi, mikä operoidessaan lukuun x antaa luvun $f(x)$.
Tällöin
$$\frac{\delta F_2[f]}{\delta f(y)} = \frac{\delta}{\delta f(y)}(f^2 - f) = 2f(y) - 1 \; .$$

Yleensä funktionaaliderivaatoille pätee ketjusääntö:
$$\frac{\delta}{\delta f(y)} E[F[f]] = \frac{\delta E}{\delta F[f(y)]} \cdot \frac{\delta F}{\delta f(y)} \cdot \cancel{f(y)} \qquad (1.16)$$

Usein funktionaali on integraalimuunnos:
$$E[f](x) = \int K(x,y)\, f(y)\, dy \qquad (1.17)$$

Funktiota $K(x,x')$ kutsutaan muunnoksen kerneliksi. Nyt
$$\frac{\delta E[f](x)}{\delta f(z)} = \int dy\, K(x,y) \underbrace{\frac{\delta f(y)}{\delta f(z)}}_{\delta(y-z)} = K(x,z)$$

Huom! $\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta(x-y)$! Hyödyllinen!

Vastaavasti jos

$$E[f](x) = \int dx_1\, dx_2\; K(x, x_1, x_2)\, f(x_1)\, f(x_2)$$

$$\frac{\delta E}{\delta f(y)} = \int dx_2\, K(x, y, x_2)\, f(x_2) + \int dx_1\, K(x, x_1, y)\, f(x_1)$$

$$\frac{\delta^2 E}{\delta f(y_1)\,\delta f(y_2)} = K(x, y_2, y_1) + K(x, y_1, y_2)$$

Jos nyt vielä kernel $K(x, x_1, x_2 .. x_n)$ on symmetrinen x_i:den permutaatioissa (kuten usein on!), saamme

$$G[f] = \int dx_1 .. dx_n\, K(x, x_1 .. x_n)\, f(x_1) .. f(x_n)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta G[f]}{\delta f(y_1) .. \delta f(y_n)} = n!\, K(x, y_1, .. y_n) \qquad (1.18)$$

Usein vielä $K(x, x_1, .. x_n) \to K(x_1, .., x_n)$, eli integraalissa ei ole ulkoista muuttujaa.

2. Kenttäteorian perusteet

- Polkuintegraali on elegantti ja nykyään eniten käytetty tapa kvantisoida kenttäteoria. Näin myös tässä. Kanoninen kvantisointi (2. kvantisointi) on analoginen kvanttimekaniikan lähestymistavan kanssa; t.s. se postuloi kommutaatiorelaatioita analogisesti $[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$:n kanssa. Aloitetaan tästä:

2.1. Kanoninen kvantisointi

kvanttimekaniikka: $[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$; $H=\bar{p}\dot{\bar{x}}-\mathcal{L}$; $\bar{p}=\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\bar{x}}}$

Klassisessa kenttäteoriassa meillä on vastaavasti kenttä $\varphi(\bar{x},t)$, sen Lagrangen tiheys $\mathcal{L}(\varphi,\partial_\nu\varphi)$.

φ:n kanoninen impulssi $\pi(\bar{x},t)=\dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{\varphi}(\bar{x},t)}=\dot{\varphi}(x,t)$

missä jälkimmäinen pätee $\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\nu\varphi)(\partial^\nu\varphi)-V(\varphi)$:lle.

Hamiltonin tiheys

$$\mathcal{H}=\pi\dot{\varphi}-\mathcal{L} \quad ; \quad H=\int d^3x\, \mathcal{H}$$

<u>Asetetaan</u> kommutaatiorelaatiot (i.e. upgreidataan φ, π operaattoreiksi $\hat{\varphi}, \hat{\pi}$!)

$$[\hat{\varphi}(x',t), \hat{\varphi}(x,t)] = 0 \tag{2.1}$$

$$[\hat{\pi}(x',t), \hat{\pi}(x',t)] = 0$$

$$[\hat{\varphi}(x',t), \hat{\pi}(x,t)] = i\delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{x}') \qquad (\times \hbar)$$

(Heisenbergin kuva) Huom! sama aika

<u>Vapaa</u> kenttä toteuttaa LY:n (klassinen!)

$$(\partial_\nu \partial^\nu + m^2)\varphi = (-\hat{p}_\nu \hat{p}^\nu + m^2)\varphi = 0 \tag{2.2}$$

ratkaisuina ovat tasoallot $\varphi \sim e^{ik\cdot x} = i(k_0 x_0 - \bar{k}\cdot\bar{x})$

joten yleinen ratkaisu on lineaarikombinaatio

$$\underline{\varphi(\bar{x},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\bar{k}}}} \left[a_{\bar{k}} e^{-ik\cdot x} + a^+_{\bar{k}} e^{+ik\cdot x} \right]} \tag{2.3}$$

↖ tavanmukainen normalisaatio

missä $\underline{E_{\bar{k}} = k_0 = \sqrt{\bar{k}^2 + m^2}}$. tässä $a_{\bar{k}}, a^+_{\bar{k}}$ vain kertoimia

Jos nyt vaadimme kommutaatiorelaatiot (2.1), niin a_k, a^+_k ylenevät operaattoreiksi ja

$$\boxed{\begin{aligned} [a_{\bar{k}}, a_{\bar{k}'}] &= [a^+_{\bar{k}}, a^+_{\bar{k}'}] = 0 \\ [a_{\bar{k}}, a^+_{\bar{k}'}] &= \delta^{(3)}(\bar{k}-\bar{k}')\cdot(2\pi)^3 \end{aligned}} \tag{2.4}$$

HT. tarkista!

Tarkistus HT. Huom!

$$\hat{\pi} = \partial_0 \hat{\varphi} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{E_k}{2}} \left[a_k e^{-ikx} - a_k^{+} e^{ikx} \right] \quad (2.5)$$

Kummallinen tekijä $\frac{1}{\sqrt{2E_{\bar{k}}}}$ integraalissa antaa mukavan normalisaation a-operaattoreille.

Se myös tekee mitan $\frac{d^3k}{(2\pi)^3 \cdot 2E_k}$ Lorentz-invariantiksi:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_{\bar{k}}} f(k) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (2\pi)\, \delta(k^2 - m^2)\, f(k) \Big|_{k_0 > 0}$$

$$k^2 = k_0^2 - \bar{k}^2$$

jos $k^\mu \to p^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu k^\nu$, niin

$$d^4k \to d^4p \, |\det \Lambda| = d^4p$$

$$k^2 \to p^2$$

joten integraali on Lorentz-invariantti jos $f(k)$ on L-inv.

Tämän vuoksi $\frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}}$ on ainoa järkevä valinta.

Operaattorit a, a^+ ovat siis tuhoamis- ja luomisoperaattoreita.

Vakuumi on tila jonka $a_{\bar{k}}$ annihiloi:

$$a_{\bar{k}}|0\rangle = 0 \qquad (2.6)$$

$a^+_{\bar{k}}|0\rangle$ generoi 1-hiukkastilan. Jälleen Lorentz-invarianssin vuoksi normalisoidaan tavallisesti

$$|\bar{k}\rangle = \sqrt{2E_{\bar{k}}}\; a^+_{\bar{k}}|0\rangle \qquad (2.7)$$

Nyt $\langle\bar{p}|\bar{k}\rangle = 2E_{\bar{p}}\,(2\pi)^3\,\delta(\bar{p}-\bar{k})$ on Lorentz-invariantti. (Huom! $\langle 0|a_{\bar{k}}a^+_{\bar{p}}|0\rangle = (2\pi)^3\delta(\bar{p}-\bar{k})$)

Kuten ei-relativistisessa kenttäteoriassa, voimme tulkita operaattorin $\varphi(\bar{x},t)$ s.e. se generoi hiukkasen pisteeseen $\bar{x}, t$, kun operoidaan vakuumiin.

Hamilton:
$$\hat{H} = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2\right)$$
$$= (\mathrm{HT})$$
$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, E_{\bar{p}}\,\frac{1}{2}\left(a^+_{\bar{p}}a_{\bar{p}} + a_{\bar{p}}a^+_{\bar{p}}\right) \qquad (2.8)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, E_{\bar{p}}\left(a^+_{\bar{p}}a_{\bar{p}} + \frac{1}{2}\underbrace{[a_{\bar{p}}, a^+_{\bar{p}}]}_{\delta(0)=\infty!}\right) \qquad (2.9)$$

Toinen termi on ∞! Samoin (2.9) antaa ∞ tuloksen kun lasketaan

$$\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2}\int d^3k\, E_{\bar{k}} = \infty .$$

Tämä on (vanha tuttu) ∞ vakuumienergia, esiintyy myös ei-relativistisessa kvanttikenttäteoriassa. Vakuumin energia ei kuitenkaan ole observaabeli (kun emme huomioi gravitaatiota) joten jätetään se tylysti pois. Voimme käyttää normaalijärjestettyä H:ta

$$H_{\text{norm. järj.}} = :H: = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E_k\, a^\dagger_{\bar{k}} a_{\bar{k}} \qquad (2.10)$$

(pudotan jatkossa :: t):

Nyt

$$H|\bar{p}\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E_{\bar{k}}\, a^\dagger_{\bar{k}} \overbrace{a_{\bar{k}}\, a^\dagger_{\bar{p}}}^{[a_{\bar{k}}, a^\dagger_{\bar{p}}] - a^\dagger_{\bar{p}} a_{\bar{k}}} |0\rangle \cdot \sqrt{2E_p}$$

$$= E_{\bar{p}}\, |\bar{p}\rangle \qquad (2.11)$$

kuten olettaa saattaakin.

Reaaliarvoiselle skalaarikentälle $\varphi^\dagger = \varphi$ selvästi.

<u>Kompleksinen</u> skalaari selventää hitu/antihitu-tulkintaa. Vapaan kentän Lagrangen tiheys

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi \qquad (2.12)$$

Tämä on globaalisti $U(1)$-invariantti $\varphi \to e^{i\theta}\varphi$

Nyt $\quad \pi = \dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 \varphi)} = \partial_0 \varphi^* ; \quad \pi^* = \partial_0 \varphi$

Koska kenttä on kompleksinen, tasoaaltokehitelmässä on 2 funktiota:

$$\underline{\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} \left[a_{\bar{k}} e^{-ikx} + b^\dagger_{\bar{k}} e^{ikx} \right]} \qquad (2.13)$$

kx „ $k_0 x_0 - \bar{k}\cdot\bar{x}$

$k_0 = E_k = \sqrt{\bar{k}^2 + m^2}$

Kommutaatiorelaatioilla $[a_{\bar{k}}, a^\dagger_{\bar{k}'}] = [b_{\bar{k}}, b^\dagger_{\bar{k}'}] = \underbrace{\ }_{(2\pi)^3}\delta^{(3)}(\bar{k}-\bar{k}')$, muut $= 0$, saadaan kanoniset kommutaattorit kuten halutaankin:

$$[\varphi(t,\bar{x}), \pi(t,\bar{y})] = [\varphi^\dagger(t,\bar{x}), \pi^\dagger(t,\bar{y})] = i\,\delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{y})$$

Vakuumille $|0\rangle$ pätee $a_{\bar{k}}|0\rangle = b_{\bar{k}}|0\rangle = 0$.

Tulkinta: $\quad \varphi^\dagger(x) = \int (a^\dagger e^{ikx} + b\, e^{-ikx}) \qquad k_0 = E_{\bar{k}} \geq 0$

<u>$a^\dagger$</u> luo positiivisen taajuuden $(e^{i\omega t})$ <u>hiukkasen</u>

$\omega = E_{\bar{k}} \geq 0$

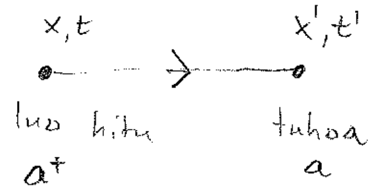
(varaus +1) ja tuhoaa negatiivisen taajuuden ($e^{-i\omega t}$) antihiukkasen.

φ tekee päinvastoin. (luo $\leftrightarrow$ tuhoa)

- Reaaliarvoiselle kentälle $\varphi^\dagger = \varphi$, e. hitu ja antihitu ovat "samoja" (= sama varaus)

Matriisielementti (propagaattori)

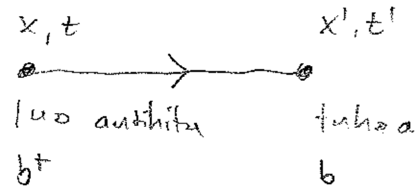
$$\langle 0 | \varphi(\bar{x}', t') \varphi^\dagger(\bar{x}, t) | 0 \rangle =$$



luo hidun pisteessä $(\bar{x}, t)$ ja tuhoaa sen $(\bar{x}', t')$:ssa.

Vastaavasti

$$\langle 0 | \varphi^\dagger(\bar{x}', t') \varphi(\bar{x}, t) | 0 \rangle =$$



Reaaliarvoiselle kentälle $\varphi^\dagger = \varphi$, ja näillä ei ole eroa.

$$D(x-y) = \langle 0 | \varphi(\overset{x_0, \bar{x}}{\overset{\|}{x}}) \varphi(y) | 0 \rangle$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \, 2E_p} e^{-ip\cdot(x-y)} \qquad (2.14)$$

on propagaattori $y \to x$.

16.10 1

2.2. Kausaliteetti

- Palataanpas kvanttimekaniikkaan:

A) Matriisielementti $\langle \bar{y} | e^{-iHt} | \bar{x} \rangle$ ei pysy valokartiossa: olk. $H = \frac{p^2}{2m}$, vapaa hiukk; nyt

$$\langle \bar{y} | e^{-it\frac{\hat{p}^2}{2m}} | \bar{x} \rangle = \langle \bar{y} | \int d^3p \, e^{-i\frac{p^2 t}{2m}} | \bar{p} \rangle \langle \bar{p} | \bar{x} \rangle$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \, e^{-it\frac{p^2}{2m} + i\bar{p}\cdot(\bar{y}-\bar{x})}$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi i t}\right)^{3/2} e^{im(\bar{y}-\bar{x})^2/2t} \neq 0 \quad \text{oli } \bar{x}-\bar{y} \text{ ja}$$

t mikä tahansa. Ei ihme, sillä H on ei-relativistinen.

B) Entä relativistinen versio? $H = \sqrt{p^2+m^2}$

Nyt $\langle \bar{y} | e^{-it\sqrt{\hat{p}^2+m^2}} | \bar{x} \rangle =$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \, e^{-it\sqrt{p^2+m^2} + i\bar{p}\cdot(\bar{y}-\bar{x})} = \text{Besselin funktioita.}$$

$$= \frac{1}{(2\pi^2)|\bar{x}-\bar{y}|} \int_0^\infty dp \, p \, \underbrace{\sin(p|\bar{y}-\bar{x}|)}_{\sim e^{ip|\bar{x}-\bar{y}|}} e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} = (*) \qquad (2.15)$$

Integrandi on rajusti oskilloiva. Voimme arvioida tulosta stat. voiheen periaatteella: kontribuutiota tulee kun $\frac{\delta \text{ voihe}}{\delta p} = 0$.

vaihekulma $= \pm p z - t\sqrt{p^2+m^2}$, $z = |\bar{x}-\bar{y}|$

$$\Rightarrow \pm z - t(p^2+m^2)^{-1/2} \cdot p = 0 \Rightarrow p^2 = \frac{m^2 z^2}{t^2 - z^2} \qquad (2.16)$$

i) Jos nyt $|\bar{x}-\bar{y}|^2 = z^2 < t^2$; siis olemme valokartion sisällä [$(t, \bar{x}-\bar{y})$ on ajanlaatuinen vektori]

Saamme

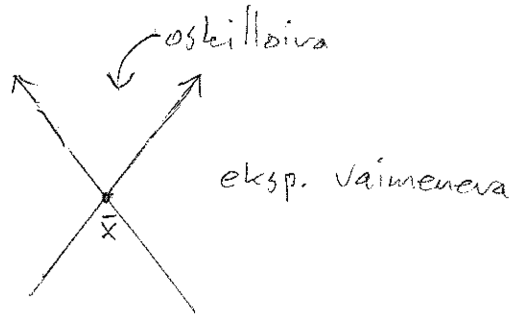
$$(*) \simeq e^{im\sqrt{t^2-z^2}} \quad \text{oskilloiva.} \qquad (2.17)$$

jos $t \to \infty$, $(*) \to e^{imt}$
z vakio

ii) Jos $z^2 > t^2$, [$(t, \bar{x}-\bar{y})$ on paikanlaatuinen]

$$(*) \simeq e^{-m\sqrt{z^2-t^2}} \qquad (2.18)$$

eksponentiaalisesti vaimeneva



Parempi, muttei tarpeeksi hyvä! Vielä löytyy superluminaalinen propagaatio.

- Kvanttikenttäteorioissa paikanlaatuinen propagaatio $\equiv 0$ eksaktisti!

Kvanttikenttäteorioissa (kompleksiarvoinen φ)

$$D(y-x) = \langle 0|\varphi(y)\varphi^{+}(x)|0\rangle$$ luo hiukkasen x:ssä, tuhoaa y:ssä

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p} e^{-ip\cdot(y-x)} \qquad (2.19)$$

Eksponentti on $ip\cdot(y-x) = i[p_0 t - \bar{p}\cdot(\bar{y}-\bar{x})]$, $p_0 = E_{\bar{p}} = \sqrt{m^2+\bar{p}^2}$

mikä on sama kuin (2.15)!

(Ero on $\frac{1}{E_p}$). Voimme siis jälleen arvioida

i) jos $(x-y)^2 > 0$ $(\Delta t^2 > \Delta x^2)$ $(x-y)$ ajanlaatuinen

$$D(y-x) \sim e^{im\sqrt{t^2-(\bar{x}-\bar{y})^2}} \sim e^{imt}, \quad t \gg (\bar{x}-\bar{y})^2$$

ii) jos $(x-y)^2 < 0$ (paikanlaatuinen)

$$D(y-x) \sim e^{-m\sqrt{(\bar{x}-\bar{y})^2-t^2}} \sim e^{-mr}, \quad |\bar{x}-\bar{y}| = r \gg t$$

Jälleen sama ongelma: hiukkanen voi propagoida valoa nopeammin, siis paikanlaatuisesti. Missä menee vikaan?

Kuten tavallista, kysymys on huonosti asetettu: Sen sijaan että laskemme $D(x-y)$:n meidän tulisi kysyä vaikuttaako mittaus/tapahtuma pisteessä x mittaukseen pisteessä y. Siis, meidän tulee laskea kommutaattori $[\hat{O}_1(x), \hat{O}_2(y)]$; jos mittaukset ovat riippumattomia $[\,,\,] = 0$.

Siis

$$\underline{[\varphi(y), \varphi^+(x)]} = \langle 0|[\varphi(y), \varphi^+(x)]|0\rangle$$

(toimii [ ], sillä [ ] on numero!)

$$= \langle 0|\varphi(y)\varphi^+(x)|0\rangle - \underbrace{\langle 0|\varphi^+(x)\varphi(y)|0\rangle}_{=\langle 0|\varphi^+(y)\varphi(x)|0\rangle^+}$$

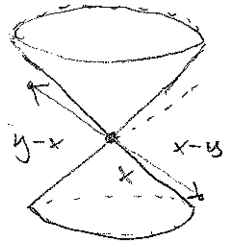
$$= D(y-x) - D^+(y-x) = \underline{D(y-x) - D(x-y)} \qquad (2.20)$$

1) Jos $(x-y)^2 < 0$, $[\ \ ] = 0$ identtisesti!

Tämä seuraa siitä että

a) $D(x-y)$ on Lorentz-invariantti (jos $\det\Lambda = 1$)

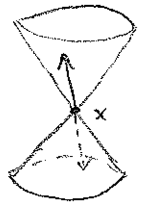
b) $x-y$ voidaan muuntaa $\to y-x$ jatkuvilla Lorentz-muunnoksilla! (puskut + kierto 180°)
$\uparrow \det\Lambda = 1$



2) Jos $(x-y)^2 > 0$, edelleen

$$[\,,\,] \sim e^{imt} + e^{-imt} \neq 0. \qquad t \gg |\bar{x}-\bar{y}|$$

Tässä tapauksessa $(x-y)$ <u>ei</u> ole muunnettavissa $(y-x)$ jatkuvilla muunnoksilla!



Tarvitaan $\det \Lambda = -1$
eikä D ole invariantti

(nämä selviävät myös eksplisiittisesti laskemalla)

Salaisuus on siinä että $\langle 0|[\varphi, \varphi^{\dagger}]|0\rangle$ propagoi sekä <u>hiukkasen että antihiukkasen</u>. Valokartion ulkopuolella nämä kumoutuvat <u>eksaktisti</u>!

Toimii myös reaaliarvoisella kentällä,

$$\langle 0|[\varphi(x), \varphi(y)]|0\rangle = 0 \qquad \text{jos } (x-y)^2 < 0.$$

(HT).

• Siis, kausaliteetti vaatii antihiukkasen olemassaolon.

reaalikentällä antihiukkanen = hiukkanen

2.3 Tämän aasinsillan kautta voimme esitellä 2 tärkeää propagaattoria : (Klein-Gordon kentälle)

1.) Retardoitu (viivästetty, retarded) propagaattori

$$D_R(x-y) = \Theta(x^0-y^0) \langle 0|[\phi(x), \phi^+(y)]|0\rangle \qquad (2.21)$$

Θ = Heavisiden askelfunktio
= 0, jos $x^0-y^0<0$
1, jos $x^0-y^0>0$

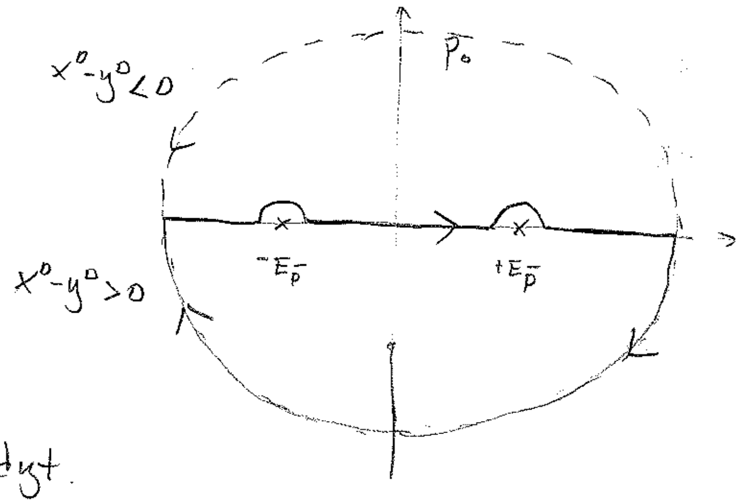
$$= \Theta(x^0-y^0) \cdot \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{e^{-ip\cdot(x-y)}}{2E_{\bar p}} + \frac{e^{ip\cdot(x-y)}}{-2E_{\bar p}} \right) \qquad (2.22)$$

$p_0 = E_{\bar p}$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int_C \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{-1}{p^2-m^2} e^{-ip\cdot(x-y)} \qquad (2.23)$$

$p_0^2 - \bar p^2 - m^2 = (p_0+E_{\bar p})(p_0-E_{\bar p})$

p^0-integraali tehdään viimeisessä vaiheessa pitkin käyrää C :



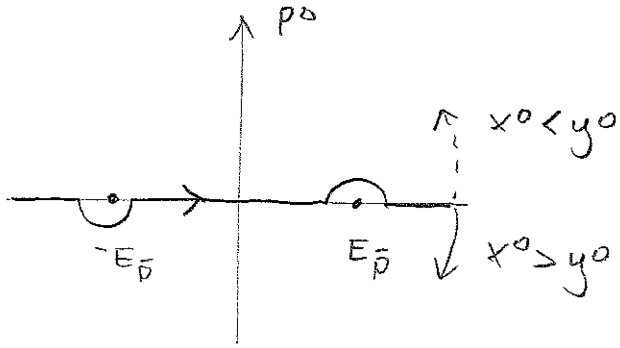
Jos $x^0>y^0$, navat antavat $-2\pi i \cdot$ residyt.
$p^0 = +E_{\bar p}$ antaa suoraan 1. termin (2.22), $p^0 = -E_{\bar p}$ 2. termin (vaihdon $\bar p \to -\bar p$ jälkeen).

Siis

$$\underbrace{D_R(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{i}{p^2-m^2}\,e^{-ip\cdot(x-y)}} \qquad + \text{ Reitti!}$$

2) Feynmanin propagaattori

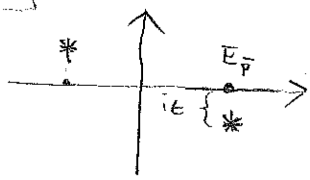
Muuten kuten retardoitu, mutta reitti on seuraava:



Kätevä tapa muistaa tämä on kirjoittaa

$$\boxed{D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}\,e^{-ip\cdot(x-y)}} \qquad (2.24)$$

eli navat ovat $p^0 = \pm(E_{\bar{p}} - i\epsilon)$



Selvästi

$$D_F(x-y) = \begin{cases} D(x-y) & \text{jos } x^0 > y^0 \\ D(y-x) & \text{jos } x^0 < y^0 \end{cases} \qquad \langle 0|\varphi(y)\varphi^\dagger(x)|0\rangle \;\; ``$$

$$= \theta(x^0-y^0)\langle 0|\varphi(x)\varphi^\dagger(y)|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\langle 0|\varphi^\dagger(y)\varphi(x)|0\rangle$$

$$\equiv \langle 0|T\varphi(x)\varphi^\dagger(y)|0\rangle \qquad (2\text{-}25)$$

$T \equiv$ aikajärjestys $=$ varhaisempi oikealle

Nämä ovat molemmat Klein-Gordonin Greenin funktioita:

esim.

$$\underbrace{\left(\partial_x^2+m^2\right) D_R(x-y)} = \partial_{x_0}\Big(\big(\overbrace{\partial_{x_0}\Theta(x^0-y^0)}^{\delta(x^0-y^0)}\big) \underbrace{\langle 0|[\varphi(x),\varphi(y)]|0\rangle}_{\substack{\| \\ 0\ (x^0=y^0!)}}\Big)$$

$$+\partial_{x_0}\Big(\Theta(x^0-y^0)\partial_{x_0}\langle 0|[\varphi(x),\varphi(y)]|0\rangle\Big)$$

$\partial_x^2 = \partial_{x_0}^2-\nabla_{\bar{x}}^2$

$$+\Theta(x^0-y^0)\left(-\nabla_{\bar{x}}^2+m^2\right)\langle 0|[\varphi(x),\varphi(y)]|0\rangle$$

$$=\delta(x^0-y^0)\langle 0|[\pi(x),\varphi(y)]|0\rangle$$

$$+\Theta(x^0-y^0)\underbrace{\left(\partial_x^2+m^2\right)\langle 0|[\varphi(x),\varphi(y)]|0\rangle}_{=0\ !}$$

$$=\underbrace{-i\,\delta^{(4)}(x-y)}. \qquad (2.26)$$

Samoin $\quad \underbrace{\left(\partial_x^2+m^2\right) D_F(x-y)=-i\,\delta^{(4)}(x-y)}$ HT. $\quad (2.27)$

- Retardoitu propagaattori: Kuvaa "todellista" vuorovaikutusta (kausaalinen!)
- Feynmanin propagaattori: tarvitaan Feynmanin säännöissä, häiriökehitelmä.

- Tämä oli kaikki <u>vapaalle</u> K-G kentälle. Kanoninen formalismi voidaan yleistää myös vuorovaikuttavalle kentälle, mutta tässä tutkimme vuorovaikutuksia <u>Feynmanin</u> <u>polkuintegraalin</u> avulla

2.4. Polkuintegraali

Aivan kuten kvanttimekaniikka voidaan formuloida polkuintegraalina, niin sama toimii kenttäteorialle. Tässä tapauksessa vielä erittäin käytännöllisesti; polkuintegraali on nykyään käytetyin tapa formuloida kvanttikenttäteoria.

- Feynmanin polkuintegraali: (F., 1948)

$$F = \int D\varphi \, e^{+i\int d^4x \, \mathcal{L}} \tag{2.28}$$

Tässä $D\varphi = [\prod_x d\varphi(x)]$, $\mathcal{L}$ Lagrangen tiheys.

- Feynmanin propagaattori saadaan nyt

$$D_F(x-y) = \langle 0 | T \hat{\varphi}(y) \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int D\varphi \, \varphi(x) \varphi(y) \, e^{+i\int d^4x \, \mathcal{L}} \tag{2.29}$$

(skalaarikentälle) ja yleensä

$$\langle 0 | T f(\hat{\varphi}) | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int D\varphi \, f(\varphi) \, e^{i\int d^4x \, \mathcal{L}}$$

- Kaava (2.28) otetaan usein kvanttikenttäteorian määritelmäksi, siis hylätään Hamiltonin formalismi.
  - Eksplisiittisesti Lorentz-invariantti
  - "tavallinen" integraali, ei sisällä "tiloja" $|\rangle$ etc.
  - Tarjoaa luonnollisen lähtökohdan eri lähestymistavoille (ei-perturbatiivinen, hila, etc.)

Ekvivalenssi Polkuintegraali $\Leftrightarrow$ Hamilton:

Aivan kuten kvanttimekaniikassa, voimme osoittaa

$$\langle \varphi_b(\bar{x}) | e^{-i\hat{H}t} | \varphi_a(\bar{x}) \rangle = C \cdot \int D\varphi \, e^{i\int_0^t d^4x \mathcal{L}}$$

missä polkuintegraalissa $\varphi(0,\bar{x}) = \varphi_a(\bar{x})$; $\varphi(t,\bar{x}) = \varphi_b(\bar{x})$

i.e. alku- ja loppukonfiguraatio on fiksattu, mutta muuten kenttä heiluu.

- jaetaan t N: osaan $t = N\,\delta t$
- käytetään $\mathbb{1} = \int \underset{\prod_x d\varphi(x)}{\underset{\parallel}{d\varphi}} \, |\varphi\rangle\langle\varphi| = \int d\pi \, |\pi\rangle\langle\pi|$

missä $\hat{\varphi}(\bar{x})|\varphi_a\rangle = \varphi_a(\bar{x})|\varphi_a\rangle$. Nyt

$$\langle \varphi | \pi \rangle \propto e^{i\int d^3\bar{x}\, \varphi(\bar{x})\pi(\bar{x})}, \text{ yleistys } \langle x|p\rangle = e^{ipx}$$

- Siis: $\langle \varphi_b | e^{-i\hat{H}t} | \varphi_a \rangle =$

$$\int \prod_{i=1}^{N-1} d\varphi^i \langle \varphi_b | e^{-i\hat{H}\delta t} | \varphi^{N-1} \rangle \langle \varphi^{N-1} | e^{-i\hat{H}\delta t} | \varphi^{N-2} \rangle \times \ldots$$
$$\times \langle \varphi^1 | e^{-i\hat{H}\delta t} | \varphi_a \rangle$$

- Nyt $\langle \varphi^{i+1} | e^{-i\hat{H}\delta t} | \varphi^i \rangle = \int d\pi^i \langle \varphi^{i+1} | \pi^i \rangle \langle \pi^i | e^{-i\hat{H}\delta t} | \varphi^i \rangle$

Tehdään oletus: $\langle \pi^i | e^{-i\hat{H}\delta t} | \varphi^i \rangle = e^{-iH(\varphi^i,\pi^i)\delta t} \langle \pi^i | \varphi^i \rangle + \mathcal{O}(\delta t^2)$

Tämä on OK kaikilla järkevillä $\hat{H}$:lla

(jos $\hat{H}$ on $\hat{\varphi}$:n ja $\hat{\pi}$:n funktio)

$$\Rightarrow \langle \varphi^{i+1} | e^{-i\hat{H}\delta t} | \varphi^i \rangle = C e^{i\int d^3\bar{x}\, \pi^i (\varphi^{i+1} - \varphi^i)} \cdot e^{-iH(\varphi^i, \pi^i)\delta t}$$

$$\approx C \cdot \exp\left[i\delta t \int d^3x \underbrace{(\pi^i \dot{\varphi}^i - \mathcal{H})}_{\mathcal{L}} \right]$$

Lopulta saamme siis

$$\langle \varphi_b | e^{-i\hat{H}t} | \varphi_a \rangle = C^N \int \prod_1^{N-1} d\varphi^i \; e^{i\int_a^b d^4x \mathcal{L}}$$

$$= C^\infty \int D\varphi \, e^{i\int_a^b d^4x \,\mathcal{L}}$$ reunaehdot!

Vastaavasti voidaan osoittaa että

$$\langle 0 | T \hat{\varphi}_H(y) \hat{\varphi}_H(x) | 0 \rangle = \frac{\int D\varphi \; \varphi(y)\varphi(x) \, e^{i\int \mathcal{L}}}{\int D\varphi \; e^{i\int \mathcal{L}}}$$

Heisenberg-kuva

Tässä nimittäjä ($= Z$) kumoaa hankalan C^∞ !

(käytä

$$\langle \varphi_a | e^{-i\hat{H}(t_a - y^0)} \hat{\varphi}_S(\bar{y}) e^{-i\hat{H}(y^0 - x^0)} \hat{\varphi}_S(\bar{x}) e^{-i\hat{H}(x^0 + t_b)} | \varphi_b \rangle$$

jaa δt-väleihin jne...)

$\square$