Kätevä apuväline polkuintegraaliin on ulkoinen <u>lähdekenttä</u> $J(x)$:

$$F[J] = \int D\varphi \, e^{iS[\varphi] + i\int d^4x \, J(x)\cdot\varphi(x)} \qquad (2.30)$$

Tämä esitellään vain siksi että Greenin funktiot tulevat olemaan <u>derivaattoja</u> $J(x)$:n <u>suhteen</u>:

$$\frac{\delta}{i\delta J(x)} \frac{\delta}{i\delta J(y)} \frac{F[J]}{F[0]}\bigg|_{J=0} = \frac{\int D\varphi \, \varphi(x)\varphi(y) \, e^{iS}}{\int D\varphi \, e^{iS}} = \langle 0| \, T\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle$$

$$\left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4y \, f(y) J(y) = f(x) \quad ; \quad \boxed{\frac{\delta J(y)}{\delta J(x)} = \delta^{(4)}(x-y)} \right)$$

Ylläoleva siis skalaarikentälle; vektorikentälle $J^a(x)\,\varphi^a(x)$, <u>kompleksikentälle</u> $J^*(x)\,\varphi(x) + \varphi^*(x)\,J(x)$

$$= 2(J_R \varphi_R + J_I \varphi_I)$$

Tarkastellaan seuraavaksi vapaata Klein-Gordon skalaaria:

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\nu \varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right] \qquad (2.31)$$

$$= \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \varphi [\underbrace{\partial_\nu \partial^\nu}_{\equiv \Box} + m^2] \varphi \right] \quad + \underbrace{\text{pintatermi}}_{\to 0,\ |x| \to \infty.}$$

(oletus)

Nyt siis (2.22) on Gaussista muotoa, ja formaalisti

$$F[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \varphi (\Box + m^2) \varphi + J\varphi \right) \right] \qquad (2.32)$$

$$= \underbrace{\text{vakio} \cdot [\det(\Box + m^2)]^{-1/2}}_{\text{luku, ei riipu } \varphi\text{:stä tai } J\text{:stä } = F[J=0]} \exp\left[-\frac{i}{2} \int dx dy \, J(x) (\Box + m^2)^{-1} J(y) \right]$$

käyttäen siis kaavoja (1.13) ja (1.14). Tämä on kuitenkin vasta formaalia; lähemmin:

A.) Konvergenssi: sovelletaan Gaussista integraalia puhtaasti imaginaariseen eksponenttiin. Korvataan

$$(-\Box - m^2) \to (-\Box - m^2 + i\epsilon) \qquad (2.33)$$

tämä takaa (2.24):n suppenemisen

B) $(\Box + m^2 - i\epsilon)^{-1}$? Muistetaan että

$$(\Box + m^2 - i\epsilon)\, D_F(x-y) = -i\,\delta^{(4)}(x-y) \qquad \text{kaavasta (2.27)}$$

$$\Rightarrow \underline{D_F(x-y) = -i(\Box + m^2 - i\epsilon)^{-1}} \tag{2.34}$$

Siis integraalin konvergenssi → Feynmanin propagaattori.

Tehdään muuttujanvaihto $\underline{\varphi'(x) = \varphi(x) - i\int d^4y\, D_F(x-y)\, J(y)}$ (2.32):een ⇒

$$\begin{aligned} F[J] = \int D\varphi' \exp\Big[i\int d^4x \Big(& \tfrac{1}{2}\varphi'(-\Box - m^2)\varphi' - i\tfrac{1}{2}\varphi' \underbrace{\int d^4y\, \overbrace{(\Box + m^2) D_F}^{-i\delta(x-y)} J(y)}_{-iJ(x)} \\ & - \tfrac{1}{2} J(x)\varphi'(x) - i\tfrac{1}{2}\int d^4y\, J(x) D_F(x-y) J(y) \\ & + J(x)\cdot\Big(\varphi'(x) + i\int d^4y\, D_F(x-y) J(y)\Big)\Big)\Big] \end{aligned}$$

$$= \underline{W[0] \times \exp\Big[-\tfrac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x)\, D_F(x-y)\, J(y)\Big]}$$

↑ vakio·$(\det)^{-1/2}$

Siis vapaalle hiukkaselle (skalaari)

$$\boxed{Z[J] \equiv \frac{F[J]}{F[0]} = e^{-\frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x)\, D_F(x-y)\, J(y)}} \tag{2.35}$$

Huom! usein käytetään symbolia $Z[J]$ tarkoittamaan (Peskin) $F[J]$:tä

Tästä saamme derivoimalla Greenin funktiot:

$$\frac{-i\delta}{\delta J(x_1)} Z[J] = -i\int d^4y\, D_F(x_1-y)\, J(y)\, Z[J] \to 0, \text{ kun } J \to 0.$$

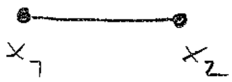
$$= i\int d^4y\, J(y)\, D_F(y-x_1)\, Z[J]$$

siis

$$\langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2)|0\rangle = (-i)^2 \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} Z[J]\Big|_{J=0}$$

$$= D_F(x_1-x_2)\, Z[J]\Big|_{J=0} = D_F(x_1-x_2). \qquad (2.36)$$

Diagrammaattisesti =



Edelleen

$$\frac{\delta^3 Z[J]}{\delta J(x_1)\,\delta J(x_2)\,\delta J(x_3)} = \frac{\delta^2}{\delta J_{x_1}\,\delta J_{x_2}}\Big(-\overbrace{J_y \underset{= D_F(y-x_3)}{D_{y3}}}^{\int dy\, J(y)\, D_F(y-x_3)}\Big) Z[J]$$

$$= \frac{\delta}{\delta J_{x_1}}\left(-D_{23} + J_y D_{y3}\, J_z D_{z2}\right) Z[J]$$

$$= \left(D_{13} J_z D_{z2} + J_y D_{y3} D_{12} + D_{23} J_y D_{y1} - J_y D_{y3} J_z D_{z2} J_w D_{w1}\right) \times Z[J]$$

$\to 0$, kun $J \to 0$.

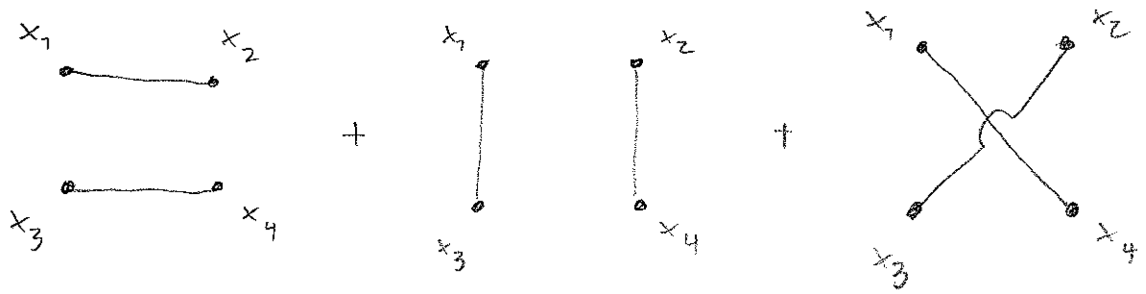
Selvästi täytyy olla parillinen määrä derivaattoja.

Sitä vastoin

$$\langle 0| T\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)|0\rangle = \frac{(-i)^4\delta^4}{\delta J_1\cdots\delta J_4} Z[J]\Big|_{J=0}$$

$$= D_{13}D_{42} + D_{43}D_{12} + D_{23}D_{41} = D_{12}D_{34} + D_{13}D_{24} + D_{14}D_{23} \qquad (2.37)$$

Graafisesti tämä on



Tämänhän olisi voinut kirjoittaa suoraankin - yhdistetään vaan pisteet x_i. <u>Feynmanin</u> <u>säännöt</u> seuraavat kuinka se tapahtuu (pal. pian).

Tämä ei nyt ole vielä kovinkaan kiinnostavaa, kyseessä on ollut vapaa teoria. Seuraavaksi katsotaan vuorovaikuttavaa teoriaa.

Z[J] <u>generoi</u> S:n Greenin funktiot.

19.10

Olkoon meillä skalaariteoria missä

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{1}{4!}\lambda \varphi^4 \qquad (2.38)$$

Nyt $S = \int d^4x \, \mathcal{L} = S_0 - \underbrace{\int d^4x \frac{1}{4!}\lambda \varphi^4}_{\equiv S_I}$ ei ole kvadraattinen, eikä integraalia $\int \mathcal{D}\varphi \, e^{iS}$ osata laskea eksaktisti. 2 tavallista lähestymistapaa:

- Numeerinen MC-integrointi (hilalaskenta), ei käsitellä tässä
- $\boxed{\text{häiriöteoria}}$: ekspandoidaan λ:n sarjana.

Siis määritellään $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$, $\mathcal{L}_I = -\frac{1}{4!}\lambda \varphi^4$ (2.39)

Alaindeksi 0 tarkoittaa nyt vapaata teoriaa, $\lambda = 0$.

$$F[J] = \int \mathcal{D}\varphi \, e^{iS_0[\varphi, J] + iS_I[\varphi]} \qquad (2.40)$$

$$Z[J] = F[J] / F[0]$$

F:n voi nyt ekspandeerata vaa'alla voimalla, mutta seuraava temppu on kätevämpi:

Koska $\frac{-i\delta}{\delta J(x)} F_0[J] = \int \mathcal{D}\varphi \, \varphi(x) e^{iS_0}$, niin nähdään että

$$F[J] = e^{iS_I\left[\frac{-i\delta}{\delta J}\right]} F_0[J] = e^{i\int d^4x \, \mathcal{L}_I\left(\frac{-i\delta}{\delta J(x)}\right)} F_0[J] \qquad (2.41)$$

Mistä saadaan kehittämällä $\mathcal{L}_I = O(\lambda)$

$$F[J] = F_0[J] + i\int d^4x\, \mathcal{L}_I\left(\frac{-i\delta}{\delta J_x}\right) F_0[J] + \ldots$$

$$= F_0[J] - i\frac{\lambda}{4!}\int d^4x \left(\frac{-i\delta}{\delta J(x)}\right)^4 F_0[J] + \ldots \qquad (2.42)$$

Nythän $\dfrac{\delta}{\delta J(x)} F_0[J] = -\int d^4y\, D_F(x-y)J(y)\, F_0[J] \equiv -D_{xy}J_y F_0[J]$,

$$\frac{\delta^2}{\delta J(x)^2} F_0[J] = (-D_{xx} + \overbrace{D_{xy}J_y\, D_{xz}J_z}^{(D_{xy}J_y)^2})\, F_0[J]$$

$$\frac{\delta^3}{\delta J(x)^3} F_0[J] = (2\, D_{xx}\, D_{xy}J_y + D_{xx}\, D_{xy}J_y - (D_{xy}J_y)^3)\, F_0[J]$$

$$\frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} F_0[J] = (3\, D_{xx}^2 - 6(D_{xy}J_y)^2 D_{xx} + (D_{xy}J_y)^4)\, F_0[J]$$

$$= \Big[3\, D_F(0)^2 - 6\, D_F(0)\int d^4y_1\, d^4y_2\, D_F(x-y_1)D_F(x-y_2)\, J(y_1)J(y_2)$$

$$+ \int dy_1 dy_2 dy_3 dy_4\, D_F(x-y_1)\ldots D_F(x-y_4)\, J(y_1)J(y_2)J(y_3)J(y_4)\Big]$$

$$\times F_0[J]$$

jos kirjoitamme integraalit eksplisiittisesti.

Nyt siis saamme generoivan funktion

$$Z[J] = \frac{F[J]}{F[0]} = \text{seuv. sivu}$$

$$Z[J] = \frac{1 - i\frac{\lambda}{4!}\int dx\left[3D_{xx}^2 - 6(D_{xy}J_y)^2 D_0 + (D_{xy}J_y)^4\right]}{1 - i\frac{\lambda}{4!}\int dx\left[3D_{xx}^2\right]} \frac{F_0[J]}{F_0[0]} + \dots$$

$$= Z_0[J]\left[1 - i\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\left[-6(D_{xy}J_y)^2 D_{xx} + (D_{xy}J_y)^4\right]\right] + O(\lambda^2)$$

Voimme nyt laskea n-piste Greenin funktiot:

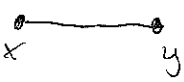
$$\frac{\delta}{\delta J(x)} Z[J]\Big|_{J=0} = \underbrace{\left(\frac{\delta}{\delta J(x)} Z_0[J]\right)}_{=0}[\,..\,]\Big|_{J=0} + \underbrace{Z_0[J]\frac{\delta}{\delta J(x)}[\,..\,]}_{=0}\Big|_{J=0} = 0$$

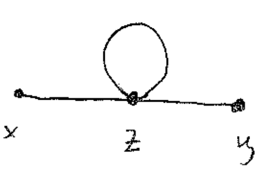
Mutta 2-pistefunktio:

$$(-i)^2\frac{\delta^2}{\delta J(x)\delta J(y)} Z[J]\Big|_{J=0} = \frac{(i)^2\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x)\delta J(y)}\Big|_{J=0} + \overbrace{Z_0[0]}^{1}\cdot\frac{(i)^2\delta^2}{\delta J(x)\delta J(y)}[\,\dots\,]$$

$$= D_F(x-y) - i\frac{\lambda}{4!}\,12\int d^4z\, D_F(x-z)D_F(y-z)D_F(z-z) \qquad (2.42)$$

Diagrammaattisesti tämä on



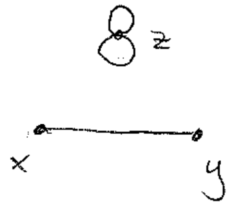
$-i\frac{\lambda}{2}$


$+ O(\lambda^2)$ (2.43)

Näin olemme törmänneet <u>koordinaattiavaruuden</u> Feynmanin diagrammoihin.

Huom! $Z[J]$:stä kumoutui termi

$3\int dx\, D_{xx}^{2}$. Jos se olisi mukana, saisimme myös kontribuution



$$= D_F(x-y)\cdot \int d^4z\,\big(D_F(z-z)\big)^2$$

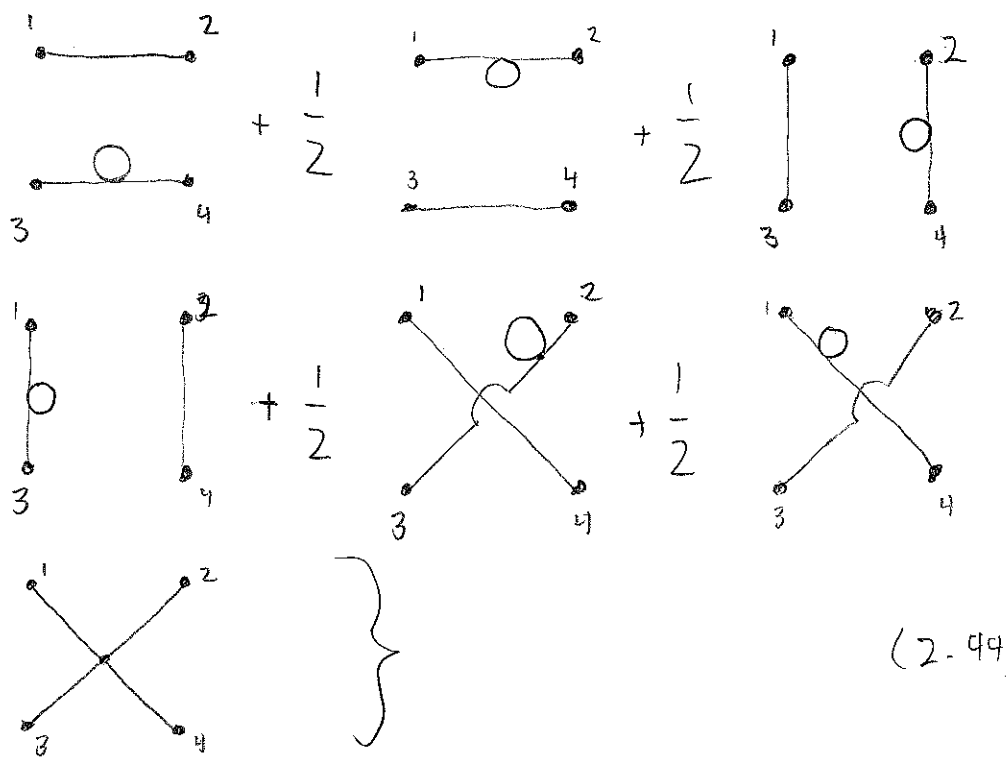
Greenin funktioon. Tällaista diagrammaa sanotaan epäyhtenäiseksi (disconnected). Vast. diagramma (2-43) on yhtenäinen.

4-piste Greenin funktion $\mathcal{O}(\lambda)$-termi on vast.

$$\frac{(-i)^4\delta^4}{\delta J(x_1)\ldots\delta J(x_4)}\left(-i\frac{\lambda}{4!}\,Z_0[J]\cdot\int d^4x\big(-6\,(D_{xy}J_y)^2 D_{xx} + (D_{xy}J_y)^4\big)\right)\Bigg|_{J=0}$$

2 δJ:stä   4 δJ

$$= -i\lambda\Big\{ +\frac{1}{2} \quad + \frac{1}{2} \quad + \frac{1}{2} \quad + \frac{1}{2} \quad + \frac{1}{2} \quad + \frac{1}{2} \quad + \Big\} \qquad (2\text{-}44)$$



Viimeinen termi on ainoa yhtenäinen!
kirjoitettuna eksplisiittisesti se on

$$-i\lambda \int d^4x\, D_F(x_1-x)\, D_F(x_2-x)\, D_F(x_3-x)\, D_F(x_4-x)$$

- Yhtenäisten Greenin funktioiden generaattori:

Häiriöteoriassa yhtenäiset Greenin funktiot ovat täydellisiä. Esim. 4-pistefunktio

$$G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4) \equiv \langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)|0\rangle$$

$$= G^{(4)}_c(x_i) + G^{(2)}(x_1,x_2)\,G^{(2)}(x_3,x_4) + (x_2 \leftrightarrow x_3) + (x_2 \leftrightarrow x_4)$$

Näiden generoiva funktio on

$$\boxed{W[J] = -i \ln Z[J]} \qquad (2.45)$$

$$= -i \ln F[J] + \text{const.}$$

Todetaan että toimii:

$$\cdot\ \frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1)\,\delta J(x_2)}\bigg|_{J=0} = -\frac{i}{Z}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\,\delta J(x_2)}\bigg|_{J=0} + \frac{i}{Z^2}\frac{\delta Z}{\delta J(x_1)}\frac{\delta Z}{\delta J(x_2)}$$

0 jos $\frac{\delta Z}{\delta J(x_1)}=0$

$$= i\langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2)|0\rangle \qquad \text{ok.}$$

$$\frac{\delta^4 W[J]}{\delta J(x_1)\ldots\delta J(x_4)} = \frac{i}{Z^2}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\cdot\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_3)\delta J(x_4)}\Bigg|_{J=0} + 2 \text{ perm.}$$

$$- \frac{i}{Z}\frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J(x_1)\ldots\delta J(x_4)}\Bigg|_{J=0}. \qquad (2.46)$$

Ylärivin $\delta^2 Z$ - termit antavat juuri ne ei-yhtenäiset termit mitkä tulevat alarivin $\delta^4 Z$ - termistä; jäljelle jää vain yhtenäinen osa.

Siis yleisesti

$$G_c^{(n)}(x_1,\ldots x_n) \equiv \langle 0|T\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)|0\rangle_c$$

$$= -i(-i)^n \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)\ldots\delta J(x_n)}\Bigg|_{J=0} \qquad (2.47)$$

Lisäksi tarpeen ovat amputoidut Greenin funktiot, joista ulkoisten jalkojen propagaattorit poistetaan:

$$G_{\bar{c}}^{(n)}(x_1\ldots x_n) \equiv \langle 0|T\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)|0\rangle_{\bar{c}} \qquad (2.48)$$

$$= \int d^4y_1\ldots d^4y_n\, G_c^{(n)}(y_1\ldots y_n)\, D_F^{-1}(y_1-x_1)\ldots D_F^{-1}(y_n-x_n)$$

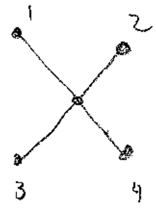
Tässä

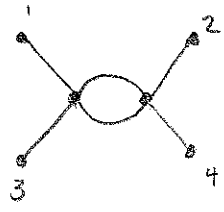
$$\int d^4y\, D_F^{-1}(x-y)\, D_F(y-z) = \delta(x-z)\ ; \quad \text{i.e. } D^{-1} = i(\Box+m^2).$$

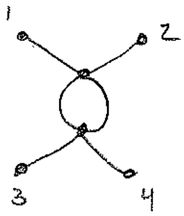
Feynmanin säännöt

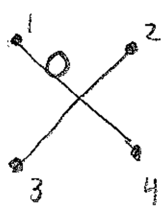
Tuijottamalla $W[J]$:tä ja sen derivaattoja saamme esim. yhtenäisen 4-piste Greenin funktion sarjana (ei-amputoitu)

$$G_c^4(x_1,\dots x_4) = \frac{-i\delta^4 W}{\delta J_1 \cdots J_4} =$$



$+$


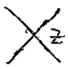
$+$


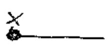
$+$


$+$ perm. $+ \mathcal{O}(\lambda^3)$ (2.49)

Yksittäinen diagrammi saadaan koordinaattiavaruuden Feynmanin säännöillä: ($\lambda\varphi^4$-teorialle!)

1. Propagaattorit 

$= D_F(x-y)$
2. Verteksit 

$= (-i\lambda)\int d^4 z$
3. Ulkoinen piste 

$= 1$
4. Kerrotaan symmetriatekijällä

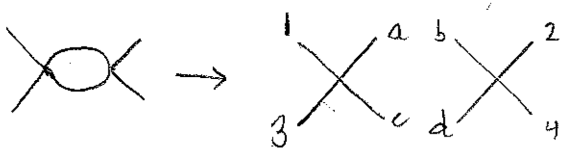
Esim. termi #2 (2.49) ssä:

$$s \cdot (-i\lambda)^2 \int dy_1 dy_2 \left(D_F(y_1-y_2)\right)^2 D_F(x_1-y_1) D_F(x_2-y_2)$$
$$\times D_F(x_3-y_1) D_F(x_4-y_2)$$

Symmetriatekijä laskee kuinka monella ekvivalentilla tavalla voidaan pisteet kontrahoida, eli missä järjestyksessä $\frac{\delta}{\delta J}$ operoi $W[J]$:n J-kertoihin.

Se voidaan laskea seuraavasti:

- otetaan verteksit erikseen



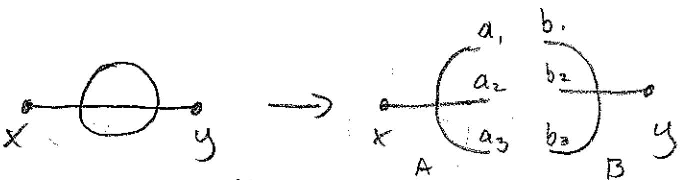
- x_1 voidaan liittää 8 jalkaan
- x_3 3 jalkaan (sama verteksi kuin x_1:llä!)
- x_2 4 jalkaan ja x_4 3 jalkaan
- Jää 2 mahdollisuutta liittää 4 jäljellä olevaa jalkaa lenkiksi (joko a-b, c-d tai a-d, c-b)
- molemmista verteksistä tulee $\frac{1}{4!}$ $\left(\mathcal{L}_I = \frac{1}{4!}\lambda\varphi^4\right)$
- $\exp(iS_I) = 1 + iS_I - \frac{1}{2!}S_I^2 + \ldots$ kehitettiin 2. kertalukuun
  $\rightarrow \frac{1}{2!}$ (ilman etumerkkejä)

siis
$$S = \frac{8\cdot 3\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{(4!)^2\cdot 2!} = \frac{1}{2}.$$

Esim.

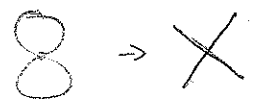
$$S = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4!\,1!} = 1$$ kuten aiemmin saatiin

Tai



$$S = \frac{\overset{x}{8}\cdot \overset{y}{4}\cdot \overset{a_1\to b_i}{3}\cdot \overset{a_2\to b_i}{2}\cdot 1}{(4!)^2\cdot 2!} = \frac{1}{6}$$

Tai vielä



$$S = \frac{3}{4!} = \frac{1}{8}.$$

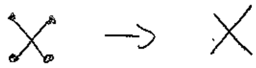
valitaan 1 jalka, se voidaan yhdistää 3 jalkaan.

Tekijän $\frac{1}{4!}$ voisi aivan hyvin laittaa myös sääntöön ②, mutta tavan mukaan kuuluu symmetriatekijään.

(syy: monet lähteet antavat (käsittämättömiä) symmetriatekijän laskusääntöjä missä tämä on faktoroitu automaattisesti)

Amputoiduille Greenin funktioille:

Esim.



$$(i\lambda)\int d^4z \; D_F(x_1-z)D_F(x_2-z)\ldots D_F(x_4-z) \longrightarrow$$

Amputoidaan

$$\to (i\lambda)\int d^4z \; \delta^{(4)}(x_1-z)\,\delta^{(4)}(x_2-z)\ldots\delta^{(4)}(x_4-z)$$

mikä tulee siitä että integroidaan ulkoisten jalkojen yli

$$\int dx_i \; D_F(x_i-z)\, D_F^{-1}(y_i-x_i) = \delta(y_i-z)$$

- Siis ulk. propagaattori $\underline{D_F \to \delta^{(4)}}$.

• Impulssiavaruuden amputoidut Greenin funktiot ovat normaalisti se standardityökalu joita käytetään laskentatoimituksissa.

• Propagaattoriin olemme jo törmänneetkin:

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon} e^{-ip\cdot(x-y)} \Rightarrow$$

$$\tilde{D}_F(p) = \frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon} \qquad (2.50)$$

⌈ Huom. eri lähteissä D_F määritellään eri i-konventiolla ⌋

• Tästä seuraa että $\underset{=D_F(x-x)}{D_F(0)} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}$ (2.51)

• Verteksille:

$$\int dx_1 .. dx_4 \cdot e^{+ip_1x_1} .. e^{+ip_4x_4} \underbrace{\left[(-i\lambda)\cdot\int d^4z\, \delta^{(4)}(x_1-z)..\delta^{(4)}(x_4-z)\right]}_{\text{amputoitu}}$$

$$= \underline{(-i\lambda)(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1+p_2+p_3+p_4)}$$

Siis:

- jokainen ulkoinen jalka saa impulssin p_i
- jokainen sis. propagaattori $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}$
- jokainen verteksi antaa $(2\pi)^4 \, \delta(\sum_i p_i) \cdot (-i\lambda)$

δ-funktiot kumoavat p-integrointeja. Jäljelle jää vain 1 integraali jokaista suljettua lenkkiä kohti, sekä 1. δ-funktio $(2\pi)^4 \, \delta(\sum_{\substack{\text{ulkoiset}\\ \text{momentit}}})$.

Saamme siis p-avaruuden Feynmanin säännöt:

1. Sisäinen propagaattori $\xrightarrow[p]{}\bullet \;=\; \dfrac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}$
2. Verteksi $\times$ $\quad -i\lambda$
3. Impulssin säilyminen vertekseissä 

$$p_1+p_2+p_3+p_4 = 0$$

4. Suljettu lenkki $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$
5. Kokonaisimpulssin säilyminen

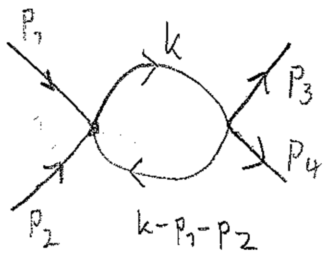
$$(2\pi)^4 \, \delta^{(4)}\Big(\sum_{\substack{\text{ulk.}\\ \text{jalat}}} p_i\Big)$$

6. Kerrotaan symmetriatekijällä

Yhtenäisille, amputoiduille G-funktioille!

Kohta 5. jätetään usein pois, mukana implisiittisesti

Esim. graafi



(2.52)

$$A = S \times (2\pi)^4 \, \delta(p_1+p_2-p_3-p_4) \times (-i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon} \frac{i}{(k-p_1-p_2)^2-m^2+i\epsilon}$$

Symmetriatekijä $S = \frac{1}{2}$ (ks. sivu 51). Tämä on todella s. 50 graafin (amputoidun) p-avaruus-versio:

$$S \cdot (-i\lambda)^2 \cdot \int dx_1 .. dx_4 \, e^{+ix_1p_1+x_2p_2-x_3p_3-x_4p_4} \cdot \int dy_1 dy_2 \, (D_F(y_1-y_2))^2$$
$$\times \delta(x_1-y_1)\, \delta(x_2-y_2)\, \delta(x_3-y_2)\, \delta(x_4-y_2)$$

$$= S\, (-i\lambda)^2 \int dy_1 dy_2 \int \frac{dk_1}{(2\pi)^4} \int \frac{dk_2}{(2\pi)^4} \frac{i}{k_1^2-m^2} \frac{i}{k_2^2-m^2} e^{-ik_1(y_1-y_2)} e^{-ik_2(y_1-y_2)}$$
$$\times e^{+iy_1(p_1+p_2)} e^{-iy_2(p_3+p_4)}$$

$$= S \cdot (-i\lambda)^2 \int dk_1 dk_2 \, \delta(k_1+k_2-p_1-p_2)\, \delta(k_1+k_2-p_3-p_4) \frac{i}{k_1^2-m^2} \frac{i}{k_2^2-m^2}$$

$$= (2\pi)^4 \delta(p_1+p_2-p_3-p_4)\; S \cdot (i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon} \frac{i}{(k-p_1-p_2)^2-m^2+i\epsilon}$$

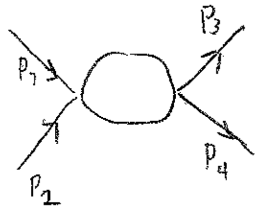
$\square$.

(kopioitu 19.10)

3. $\lambda\varphi^4$ regularisointi ja renormalisointi

3.1. Divergenssit

Tarkastellaan vielä $O(\lambda^2)$-korjausta 4-pistefunktioon, siis tulos (2.52):



Jätetään (kuten usein tehdään) $(2\pi)^4\,\delta(\Sigma p_i)$, mikä on implisiittisesti mukana. Amplitudi

$$A_4 = (-i\lambda)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \frac{i}{k^2-m^2}\, \frac{i}{(k-p_1-p_2)^2-m^2} \qquad (3.1)$$

Katsotaan nyt (eka kertaa!) korjauksen arvoa. Heti nähdään että kun k^2 on suuri,

$$A_4 \propto \int \frac{k^2\,dk^2}{k^4} \sim \ln k^2 \qquad (3.2)$$

Amplitudi A_4 siis <u>divergoi</u> logaritmisesti kun $k^2 \to \infty$! Nämä äärettömyydet pilaavat kvanttikenttäteorioita 4 dimensiossa (2,3 -dim. helpompia).

<u>Renormalisoituvissa</u> teorioissa nämä äärettömyydet voidaan absorboida teorian parametreihin (tässä tapauksessa $\lambda \to \lambda + \delta\lambda$).

Tätä varten nämä tulee kuitenkin eristää ja hallita = regularisoida

3.2 Impulssiregularisaatio

- Yleensä äärettömyydet voidaan eristää parametrisoimalla integraalit s.e. ne tulevat äärellisiksi, ja alkuperäinen ∞ integraali saadaan sopivalla rajankäynnillä.
- kun divergenssi on ultravioletti (UV), ts. se ilmenee kun $k \to \infty$, voimme regularisoida amplitudit katkaisemalla integraalin $k^2 \leq \Lambda^2$ (# katso s. 50!)
$\equiv$ impulssiregularisaatio. (infrapuna (IR) div.: $k \to 0$. Vaikea!)

Feynmanin parametrisaatio

Integraalin (3.1) laskemiseksi otamme käyttöön Feynmanin parametrisaation:

$$\frac{1}{A_1 \cdots A_n} = \Gamma(n) \int_0^1 \frac{d\alpha_1 \cdots d\alpha_n \, \delta(\sum_1^n \alpha_i - 1)}{[\alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_n A_n]^n} \qquad (3.3)$$

$\Gamma(n) = (n-1)!$, gammafunktio

Helppo todeta kun $n=2$:

$$\Gamma(2)\int_0^1 \frac{d\alpha_1 d\alpha_2\, \delta(\alpha_1+\alpha_2-1)}{[\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2]^2} = \int_0^1 d\alpha_1 \left[\alpha_1(A_1-A_2)+A_2\right]^{-2} \tag{3.4}$$

$$= -\Big/_0^1 \frac{1}{A_1-A_2}\left[\alpha_1(A_1-A_2)+A_2\right]^{-1} = \frac{-1}{A_1-A_2}\left(\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}\right) = \frac{1}{A_1A_2} \quad \square.$$

Derivoimalla saamme lisää identiteettejä, esim. derivoimalla (3.3) ($n=2$)

$$\frac{1}{A_1^p A_2^q} = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 \frac{d\alpha_1 d\alpha_2\, \alpha_1^{p-1}\alpha_2^{q-1}\,\delta(\alpha_1+\alpha_2-1)}{[\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2]^{p+q}} \tag{3.5}$$

mikä yleistyy $n>2$. HT: osoita (3.3)

Käytetään nyt Feynmanin parametrisaatiota (3.1.): een: $(q \equiv p_1+p_2)$

$$A_4 = i^{-2}(-i\lambda)^2 \frac{1}{2}\Gamma(2)\int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, d\alpha\, d\beta\, \delta(\alpha+\beta-1)\left[\alpha(k^2-m^2)+\beta((k-q)^2-m^2)\right]^{-2}$$

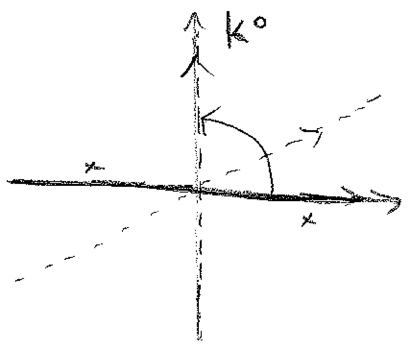
$$= \frac{\lambda^2}{2}\int^{\Lambda}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, d\alpha \Big[\underbrace{k^2-m^2-2k\cdot q(1-\alpha)+q^2(1-\alpha)}_{(k-(1-\alpha)q)^2-m^2+\alpha(1-\alpha)q^2}\Big]^{-2} \tag{3.6}$$

missä siis $k^2 < \Lambda^2$.

(*)

Itse asiassa k^2-divergenssi kaipaa hieman tarkennusta. $k^2 = k^{0^2} - \bar{k}^2$ voi mennä sekä $+\infty$ että $-\infty$!

Koko divergenssi tulee selvemmäksi kun euklidisoimme k:n:



prop. $\dfrac{i}{k_0^2 - E_k^2 + i\epsilon}$

navat (x) kuvassa.

Voimme kääntää k^0-integroinnin niin veittiä jatkuvasti, kohtaamatta napoja, $k^0 \to i\hat{k}^0$ $\quad \bar{k} \to \bar{k}$

$dk^0 \to i\,d\hat{k}_0 \quad k^2 \to -k^2$

Integraalit suljetaan $|k^0| \to \infty$ puoliympyrää pitkin. Jos tämä lenkki katoaa, niin integraalin arvo ei muutu rotaatiossa $k^0 \to ik^0$!

Nyt $k^2 < \Lambda^2 \Rightarrow k^{0^2} + \bar{k}^2 < \Lambda^2$ on.

Jos prop. on muotoa $\dfrac{1}{(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon}$,

euklidisaatio tehdään kaikille 4-impulsseille

Tehdään siis euklidisaatio (3.6):lle (tai oikeastaan jo (3.1):lle)

$k_0 \to ik_0$, $q_0 \to iq_0$

$dk_0 \to idk_0$ ← tehdään euklidisaatio kaikille 4-mom!

$$A_4 = i\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int_0^1 d\alpha\,\left[-(k-(1-\alpha)q)^2 - m^2 - \alpha(1-\alpha)\,q^2\right]^{-2} \qquad (3.6\tfrac{1}{2})$$

missä $k^2 < \Lambda^2$.

Nyt voimme harkita muuttujanvaihtoa

$$k' = k - (1-\alpha)q \qquad (3.7)$$

mutta entä rajat $k^2 < \Lambda^2 \Rightarrow k'^2 < ?$

Koska kysymyksessä on log-divergenssi, voimme asettaa $k'^2 < \Lambda^2$, koska

$$\ln k'^2 = \ln k^2 + \ln\left(1 - \frac{2k\cdot q(1-\alpha) - (1-\alpha)^2 q^2}{k^2}\right)$$

$$\simeq \ln k^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|k|}\right), \quad \text{kun } |k| \to \infty .$$

Siis korvaamalla integroimisalue

$$k^2 < \Lambda^2 \longrightarrow k'^2 = (k-(1-\alpha)q) < \Lambda^2 ,$$

integraalin divergenssi $\ln \Lambda^2$ ja sen Λ riippumaton osa eivät muutu! ero on $\sim \frac{1}{\Lambda}$.

[Jos div. on $\mathcal{O}(\Lambda)$ tai $\mathcal{O}(\Lambda^2)$, tämä ei toimi!]

Siis

$$A_4 = i\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\int_0^1 d\alpha\,\frac{1}{(-k'^2-Q^2)^2} \qquad Q^2 = m^2+\alpha(1-\alpha)q_E^2$$

$$= i\frac{\lambda^2}{2}\underbrace{\int d\Omega}_{\frac{2\pi^2}{\Gamma(2)}=\underline{\underline{2\pi^2}}}\int_0^{\Lambda^2}\frac{1}{2}k^2dk^2\,\frac{d\alpha}{(k^2+Q^2)^2}$$

missä $d^4k \to d\Omega |k|^3 d|k| = d\Omega\,\frac{1}{2}k^2dk^2$

HT.: osoita että $\underline{\int d\Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}}$ (3.8)

Joten

$$A_4 = i\frac{\lambda^2}{2}\frac{\pi^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 d\alpha\int_0^{\Lambda^2}dk^2\left[\frac{1}{k^2+Q^2}-\frac{Q^2}{(k^2+Q^2)^2}\right]$$

$$= i\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\int_0^1 d\alpha\,\Big/_0^{\Lambda^2}\left[\ln(k^2+Q^2)+\frac{Q^2}{k^2+Q^2}\right]$$

$$= i\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\int_0^1 d\alpha\left[\ln\frac{\Lambda^2+Q^2}{Q^2}+\frac{Q^2}{\Lambda^2+Q^2}-1\right]$$

$$= i\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\int_0^1 d\alpha\left[\ln\frac{\Lambda^2}{Q^2}-1+2\frac{Q^2}{\Lambda^2}+\mathcal{O}(\Lambda^{-4})\right] \qquad (3.9)$$

Emme tarvitse nyt kuin divergoivan ($\ln\Lambda^2$) ja vakiotermin. Jäljellä on vielä α-integrointi:

$$I = \int_0^1 d\alpha \ln\big[\overbrace{\alpha(1-\alpha)q^2 + m^2}^{Q^2}\big]$$ q euklidinen $q^2 = q_0^2 + \bar{q}^2$.

Nyt $\alpha(1-\alpha)q^2 + m^2 = -q^2(\alpha-\alpha_+)(\alpha-\alpha_-)$,

missä $\alpha_\pm$ ovat $\alpha(\alpha-1) - \frac{m^2}{q^2}$:n 0-kohdat:

$$\alpha_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4\frac{m^2}{q^2}}$$

Siis $I = \int_0^1 d\alpha\Big(\ln(-q^2) + \ln(\alpha-\alpha_+) + \ln(\alpha-\alpha_-)\Big)$

$$= \ln(-q^2) + \Big/_0^1 \Big[(\alpha-\alpha_+)\big(\ln(\alpha-\alpha_+)-1\big) + (\alpha_+ \to \alpha_-)\Big]$$

$$= \ln(-q^2) + (1-\alpha_+)\ln(1-\alpha_+) - (1-\alpha_+)$$
$$+ \alpha_+\ln(-\alpha_+) - \alpha_+ \quad + (\alpha_+ \to \alpha_-)$$

Nyt $(1-\alpha_\pm) = \alpha_\mp$; $\alpha_+ + \alpha_- = 1$.

$$\alpha_+\alpha_- = -\frac{m^2}{q^2}$$

joten $I = \ln(-q^2) - 2 + \alpha_-\ln(-\alpha_-^2) + \alpha_+\ln(-\alpha_+^2)$

$$= \ln -q^2 - 2 + \frac{1}{2}\ln(\alpha_+\alpha_-)^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1+4\frac{m^2}{q^2}}\,\ln\left(\frac{\alpha_+}{\alpha_-}\right)^2$$

$$= \ln(-q^2) - 2 + \ln\left(-\frac{m^2}{q^2}\right) + \sqrt{1+4\frac{m^2}{q^2}}\,\ln\frac{1+(1+4m^2/q^2)^{1/2}}{-1+(1+4m^2/q^2)^{1/2}}$$

> 0!

$\ln(-q^2)$ kumoutuu!

Kun kerätään termit (3.9):stä, saamme vihdoin

$$\boxed{A_4 = i\,\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\left\{\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 - \left(1+4\frac{m^2}{q^2}\right)^{1/2}\ln\left[\frac{(1+4m^2/q^2)^{1/2}+1}{(1+4m^2/q^2)^{1/2}-1}\right]\right\} + \mathcal{O}(\Lambda^{-2})} \tag{3.10}$$

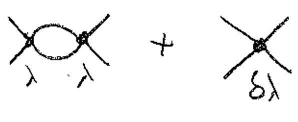
Tässä $q^2 = q_0^2 + \bar{q}^2$ on euklidinen, ja $q = p_1 + p_2$, sivu 58.

A_4 siis divergoi logaritmisesti, kuten pitikin. Saimme

$A_4 =$ div. + vakio + $\mathcal{O}(\Lambda^n)$, $n<0$.

Mitä tämä tarkoittaa? Korjaus-termiä pitäisi olla pieni kun λ pieni – onkin ääretön.
Tämä johtuu siitä että sallimme lenkissä juoksevan k:n olla $\gg$ ulkoiset momentit p_i, tai massa m.

Äärettömyydet voidaan hallita lisäämällä teoriaan vastatermejä: $\lambda \to \lambda + \delta\lambda$, siten että



= äärellinen.

3.3. Dimensionaalinen regularisaatio

Impulssiregularisaatio on käytännössä kömpelö, eikä sitä nykyään juuri käytetä.

Häiriöteoriassa ylivoimaisesti käytetyin tapa on jatkaa integraalit $d = 4 - \epsilon$ -dimensioon, missä ne ovat äärellisiä. $(\epsilon > 0)$

d-dim. vektori $k = (k^0, k^1, \dots k^{d-1})$; $k^2 = (k^0)^2 - \bar{k}^2$ (3.11)

Minkowski

ja $\eta^\nu{}_\nu = d$

Tutkitaan nyt euklidisia integraaleja (sivu 59)

$$\int \frac{d^d k}{(k^2+q^2)^p} = \int d\Omega \int_0^\infty dr\, r^{d-1} (r^2+q^2)^{-p} \qquad r = qt$$

$$= \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} (q^2)^{\frac{d}{2}-p} \int_0^\infty dt\; t^{d-1} (1+t^2)^{-p} \qquad (3.12)$$

divergoi jos $d \geq 2p$, anal. jatko.

Voimme nyt käyttää Eulerin B-funktiota

$$B(x,y) = 2\int_0^\infty dt\; t^{2x-1} (1+t^2)^{-x-y} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad (3.13)$$

$$= \int_0^1 ds\; s^{x-1} (1-s)^{y-1} \qquad \left(s = \frac{1}{t^2+1}\right)$$

jolloin

$$(3.12) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} (q^2)^{\frac{d}{2}-p} \frac{1}{2} \underbrace{B\left(\frac{d}{2}, p-\frac{d}{2}\right)}_{\frac{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(p-\frac{d}{2})}{\Gamma(d/2)}}$$

Saamme tärkeän tuloksen:

$$\boxed{\int \frac{d^d k}{[k^2+q^2]^p} = \frac{\pi^{d/2}}{[q^2]^{p-d/2}} \frac{\Gamma(p-\frac{d}{2})}{\Gamma(p)}} \qquad (3.14)$$

Γ-funktion määritelmästä seuraa myös

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt\, t^{z-1} e^{-t} = 2\int_0^\infty ds\, s^{2z-1} e^{-s^2}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{-s^2} = \sqrt{\pi} \qquad (3.15)$$

Samoin on voimassa

$$\boxed{\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + O(\epsilon)} \qquad (3.16)$$

missä $\gamma_E = 0.5772\ldots$ on Euler-Mascheronin vakio.

Hyvin pienellä modifikaatiolla saadaan

- $$\int \frac{d^d k \; k^2}{[k^2+q^2]^p} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} (q^2)^{\frac{d}{2}-p+1} \frac{1}{2} \underbrace{B\left(\tfrac{d}{2}+1, p-\tfrac{d}{2}-1\right)}_{\frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)\Gamma(p-\frac{d}{2}-1)}{\Gamma(p)}}$$

$$\Gamma\left(\tfrac{d}{2}+1\right) = \tfrac{d}{2}\Gamma\left(\tfrac{d}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi^{d/2}}{[q^2]^{p-d/2-1}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(p-\frac{d}{2}-1)}{\Gamma(p)} \qquad (3.17)$$

Symmetriasyistä on selvää että jos $k^2 \to k_a^2$, missä $a = 0,..,3$ kiinteä indeksi, tulos on $\frac{1}{d} \times (3.17)$.

ja jos $k^2 \to k_a k_b$, tulos $= 0$. Siis saamme hyödyllisen tuloksen

- $$\int \frac{d^d k \; k^\mu k^\nu}{[k^2+q^2]^p} = \frac{\pi^{d/2}}{[q^2]^{p-d/2-1}} \frac{\Gamma(p-\frac{d}{2}-1)}{2\Gamma(p)} \underbrace{\eta^{\mu\nu}}_{\delta^{\mu\nu}\text{, euklidinen}} \qquad (3.18)$$

Lisäksi voimme johtaa

- $$\int \frac{d^d k}{[k^2+2k\cdot q+M^2]^p} = \frac{\pi^{d/2}}{[-q^2+M^2]^{p-d/2}} \frac{\Gamma(p-\frac{d}{2})}{\Gamma(p)} \qquad (3.19)$$

(sijoita (3.14) $k \to k+q$; $q^2 \to M^2 - q^2$)

- $$\int \frac{d^d k\, k^\mu}{[k^2+2k\cdot q+M^2]^p} = -q^\mu \times (3.19) \qquad (3.20)$$

- $$\int \frac{d^d k\, k^\mu k^\nu}{[k^2+2k\cdot q+M^2]} = q^\mu q^\nu \times (3.19) + \frac{\delta^{\mu\nu}\pi^{d/2}}{[-q^2+M^2]^{p-d/2-1}} \frac{\Gamma(p-\frac{d}{2}-1)}{2\Gamma(p)} \qquad (3.21)$$

(3.18), mutta $q^2 \to -q^2+M^2$

Nämä olivat siis euklidisia. Yleistyvät Minkowski-avaruuteen, esim.

$$\int \frac{\overset{\text{Minkowski}}{d^d k}}{(k^2-m^2+i\epsilon)^p} = i \int \frac{\overset{\text{euklidinen}}{d^d k_E}}{(-k_E^2-m^2)^p} = (-1)^p i\, \frac{\pi^{d/2}}{(m^2)^{p-d/2}} \frac{\Gamma(p-d/2)}{\Gamma(p)}$$

Toukkaan ottaen, jos tutkimme teoriaa d-dimensiossa, on huomattava että kenttien sekä kytkinvakioiden dimensio muuttuu:

$$S = \int d^d x \, \mathcal{L} \quad = \quad \text{dimensioton}$$

$$\Rightarrow \quad [\mathcal{L}] = [x]^{-d} = [m]^d$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{1}{4!}\lambda \varphi^4$$

$$\Rightarrow \quad [\partial_\mu \varphi]^2 = [x]^{-2}[\varphi]^2 = [x]^{-d} \Rightarrow [\varphi] = [x]^{1-\frac{d}{2}} = [m]^{\frac{d}{2}-1}$$

$$[m^2\varphi^2] = [x]^{-d} \qquad \text{ok}$$

$$[\lambda\varphi^4] = [\lambda][\varphi]^4 = [x]^{-d} \Rightarrow [\lambda] = [x]^{d-4} = [m]^{4-d}$$

Jos nyt $d = 4-\epsilon$, sekä kentän φ että kytkinvakion λ dimensio muuttuu. Usein kirjoitetaan

$$\underbrace{\lambda \to \lambda \mu^\epsilon}_{\text{dimensioton}}, \qquad [\mu] = [m], \tag{3.22}$$

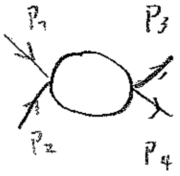
μ energiaskaala, periaatteessa mielivaltainen.

Käytännössä tämä modifikaatio aiheuttaa sen että lenkki-integraalit saavat kontribuution

$$\boxed{\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \to \mu^\epsilon \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}} \qquad \begin{matrix} d = 4-\epsilon \\ \text{dim} = 4 \text{ molemmissa!} \end{matrix} \tag{3.23}$$

$(2\pi)^d$ on konventio.

Palataan nyt graafiin (3.1)



$$= A_4 = (-i\lambda)^2 \frac{i^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2-m^2} \frac{1}{(k-q)^2-m^2}$$

$q = p_1 + p_2$

Nyt

- rotatoidaan k (ja q) euklidiseen avaruuteen (sivu 59)
- käytetään Feynmanin parametrisaatiota (s. 57)
- siirrytään $d = 4-\epsilon$ -dimensioon :

$$A_4 = \frac{i\lambda^2}{2} \int_0^1 d\alpha\, \mu^\epsilon \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \left[-(k-(1-\alpha)q)^2 - m^2 - \alpha(1-\alpha)q^2\right]^{-2} \quad (3.24)$$

Vertaa $(3.6\tfrac{1}{2})$! sijoitetaan $k' = k-(1-\alpha)q$:

$$A_4 = \frac{i\lambda^2}{2} \mu^\epsilon (2\pi)^{-d} \int_0^1 d\alpha \int d^dk' \left[k'^2 + m^2 + \alpha(1-\alpha)q^2\right]^{-2}$$

missä voimme käyttää (3.14) :

$$A_4 = \frac{i\lambda^2}{2} \mu^\epsilon (2\pi)^{-d} \int_0^1 d\alpha \frac{\pi^{d/2}\, \Gamma(2-\frac{d}{2})}{(m^2+\alpha(1-\alpha)q^2)^{2-d/2}\, \Gamma(2)} \quad (3.25)$$

Divergenssi näkyy Γ-funktiossa: (3.16)

$$\Gamma(2-\tfrac{d}{2}) = \Gamma(\tfrac{\epsilon}{2}) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (3.26)$$

Lasketaan A_4 rajalla $\epsilon \to 0$.

Nyt

$$(Q^2)^{\epsilon/2} = e^{\frac{\epsilon}{2}\ln Q^2} = 1 + \frac{\epsilon}{2}\ln Q^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \qquad (3.27)$$

joten

$$A_4 = \frac{i\lambda^2}{2(4\pi)^2}\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\int_0^1 d\alpha \left[\frac{4\pi\mu^2}{m^2 + q^2\alpha(1-\alpha)}\right]^{\epsilon/2} \qquad (3.28)$$

$$= \frac{i\lambda^2}{2\cdot 16\pi^2}\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\int_0^1 d\alpha \left[1 + \frac{\epsilon}{2}\ln 4\pi\frac{\mu^2}{m^2} - \frac{\epsilon}{2}\ln\left(1 + \frac{q^2}{m^2}\alpha(1-\alpha)\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right]$$

Voimme jälleen kirjoittaa $m^2 + q^2\alpha(1-\alpha) = -q^2(\alpha-\alpha_+)(\alpha-\alpha_-)$ (sivu 62) ja integroida:

$$A_4 = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + 2 + \ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2} - \left(1 + 4\frac{m^2}{q^2}\right)^{1/2}\ln\frac{\left(4\frac{m^2}{q^2}+1\right)^{1/2}+1}{\left(4\frac{m^2}{q^2}+1\right)^{1/2}-1}\right] \qquad (3.29)$$

$$+ \mathcal{O}(\epsilon)$$

Vertaa (3.10)! Kun regulaattori poistetaan, ($\Lambda \to \infty$ tai $\epsilon \to 0$), A_4 divergoi.

q:sta riippuva osa on sama.