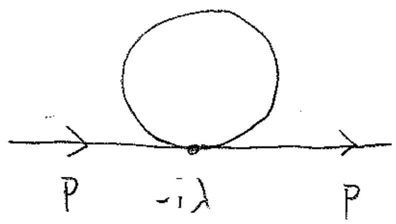
3.4. Renormalisaatio $\lambda\varphi^4$ teoriassa

Renormalisaation idea on yksinkertainen: määritellään parametrit (m^2, λ, φ:n normitus) jokaisessa kertaluvussa siten että ∞ kumoutuvat.

Katsotaan ensin 2-pistefunktion $\mathcal{O}(\lambda)$-korjausta:



(Symmetriatekijä: $\frac{4\cdot 3}{4!} = \frac{1}{2}$)

Feynmanin sääntöjen avulla amplitudi on

$$A_2 = -\frac{i\lambda}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon} \qquad (3.30)$$

Euklidisoidaan; käytetään impulssiregularisaatiota:

$$A_2 = \frac{-i\lambda}{2}\int\frac{d\Omega}{(2\pi)^4}\int_0^\Lambda dk\, k^3\frac{1}{k^2+m^2}$$

$$= \frac{-i\lambda}{16\pi^2}\int_0^\Lambda dk\left(k - \frac{km^2}{k^2+m^2}\right) = \frac{-i\lambda}{16\pi^2}\Big/_0^\Lambda\left(\tfrac{1}{2}k^2-\tfrac{m^2}{2}\ln(k^2+m^2)\right)$$

$$= \frac{-i\lambda}{32\pi^2}\left(\Lambda^2 - m^2\ln\frac{\Lambda^2+m^2}{m^2}\right)$$

$$= \frac{-i\lambda}{32\pi^2}\left(\Lambda^2 - m^2\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) \qquad (3.31)$$

Divergoi kvadraattisesti.

Dimensionaalisessa regularisaatiossa

$$A_2 = \frac{-i\lambda}{2}\mu^{\epsilon}\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2+m^2}$$

$$\underset{(3.14)}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{-i\lambda}{2}\mu^{\epsilon}\frac{\pi^{d/2}\,\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(2\pi)^d\,\Gamma(1)(m^2)^{1-d/2}} \qquad d = 4-\epsilon$$

$$= \frac{-i\lambda}{32\pi^2}\Gamma(-1+\tfrac{\epsilon}{2})\, m^2\left(1+\frac{\epsilon}{2}\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}+\mathcal{O}(\epsilon^2)\right)$$

Nyt

$$\underline{\Gamma(-1+\tfrac{\epsilon}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{-1+\frac{\epsilon}{2}} = -\left(\frac{2}{\epsilon}-\gamma_E+\mathcal{O}(\epsilon)\right)\left(1+\frac{\epsilon}{2}+\mathcal{O}(\epsilon^2)\right)$$

$$= \underline{-\frac{2}{\epsilon}+\gamma_E-1+\mathcal{O}(\epsilon)} \qquad (3.32)$$

joten

$$\underline{A_2 = \frac{-i\lambda}{32\pi^2}m^2\left[-\frac{2}{\epsilon}+\gamma_E-1-\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right]+\mathcal{O}(\epsilon)} \qquad (3.33)$$

(huom! napa on vaan $1/\epsilon$, ei esim. $1/\epsilon^2$.)

Siis $O(\lambda)$ korjaus 2-pistefunktioon divergoi. Ei-renormalisoituvissa teorioissa nämä divergenssit ovat kohtalokkaita; renormalisoituvissa voidaan absorboida kytkentävakioihin.

Voimme kumota edellä olevan äärettömyyden modifioimalla massatermiä $\mathcal{L}$:ssä:

$$\frac{1}{2}m^2\varphi^2 \to \frac{1}{2}(m^2 + \delta m^2)\varphi^2 \qquad (3.34)$$

missä lisätty $\boxed{\text{Vastatermi}}$ on formaalisti $O(\lambda)$, ja valittu siten että silmukan 

divergenssi kumoutuu.

Nyt euklidisessa avaruudessa

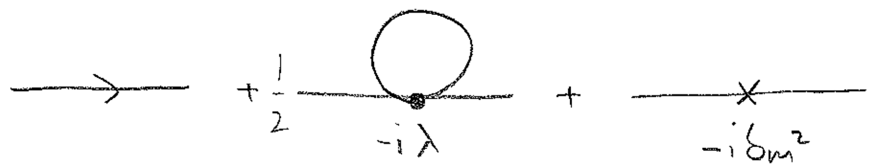
$$\frac{-i}{p^2+m^2+\delta m^2} = \frac{-i}{(p^2+m^2)\left(1+\frac{\delta m^2}{p^2+m^2}\right)} =$$

$$\frac{-i}{p^2+m^2} + \left(\frac{-i}{p^2+m^2}\right)^2 \underbrace{(-i\,\delta m^2)}_{O(\lambda)} + O(\lambda^2) \qquad (3.35)$$

Saamme siis 2-piste Greenin funktion
(ei-amputoidun, ts. lisätään $\frac{-i}{p^2+m^2}$ jalkoihin)

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{euklid.}}}{G^{(2)}_E(p)} = \underbrace{\frac{-i}{p^2+m^2}}_{O(\lambda^0)} + \left(\frac{-i}{p^2+m^2}\right)^2 \underbrace{\left(-i\,\delta m^2 + A\right)}_{O(\lambda)} + O(\lambda^2)$$

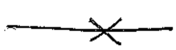
(3.31, 3.33)

$=$ 

$+ \; O(\lambda^2)$

(3.36)

Ekvivalentti – ja kenties parempi – tapa on tulkita δm^2 uutena verteksinä. Silloin sitä koskee Feynmanin sääntö

verteksi  $= -i\,\delta m^2$.

Tämän "symmetriatekijä" on $\frac{2\cdot 1}{2} = 1$

$\uparrow \frac{1}{2}\delta m^2 \varphi^2$

Kuinka δm^2 valitaan? selvästi

$$\delta m^2 = -\frac{\lambda}{32\pi^2}\left(\Lambda^2 - m^2 \ln\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + \dots \qquad \text{(impulssireg. (3.31))}$$

$$= +\frac{\lambda}{32\pi^2} m^2 \frac{2}{\epsilon} + \dots \qquad \text{(dim.reg (3.33))}$$

jotta divergenssi kumoutuu. Se miten "..." valitaan riippuu renormalisaatioskeemasta.

1.) Impulssisubtraktiossa vaaditaan että 2-pistefunktio skaalassa $p^2 = \bar{\mu}^2$, missä $\bar{\mu}$ on renormalisaatiopiste, on vapaan kentän propagaattori:

$$G_R^{(2)}(p^2 = \bar{\mu}^2) = \frac{-i}{p^2 + m^2} \qquad (3.37)$$

Tässä tapauksessa, kun A ei riipu p:stä, tämä on triviaalia: valitaan $\delta m^2 = -iA$, ja $G^{(2)} = -i/(p^2+m^2)$ p:n arvosta riippumatta. Näin ei käy yleisesti.

2) Minimaalisubtraktiossa (MS), mitä käytetään vain dim. regularisaatiossa, vähennetään vain $1/\epsilon$ -napa:

$$\delta m^2 = \frac{\lambda}{32\pi^2} m^2 \frac{2}{\epsilon} \quad (3.38)$$

Nyt

$$G_R^{(2)\,MS}(p) = \frac{-i}{p^2+m^2} + \left(\frac{-i}{p^2+m^2}\right)^2 \left(\frac{-i\lambda m^2}{32\pi^2}\right)\left(\gamma_E - 1 - \ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

"Renormalisoitu"

$$= \frac{-i}{\underbrace{p^2 + m^2 + \frac{\lambda m^2}{32\pi^2}\left(\gamma_E - 1 - \ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)}_{m_R^2}} + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (3.39)$$

Voimme lukea tästä renormalisoidun massan:

$$m_R^2(\mu) = m^2 + \frac{\lambda m^2}{32\pi^2}\left(\gamma_E - 1 - \ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (3.40)$$

Siis G_R näyttää vapaan m_R^2 -massaisen kentän propagaattorilta. $m_R^2(\mu)$ riippuu μ:stä (tuli μ^ϵ:stä), renormalisaatioskaalasta.

Normaalisti $\mu \sim$ relevantti energiaskaala, esim. $\mu^2 = m^2$.

3) Modifioitu MS-skeema, $\overline{\text{MS}}$. Kenties eniten käytetty. Vähennetään myös joutavat γ_E ja $\ln 4\pi$-tekijät:

$$\delta m^2 = \frac{\lambda}{32\pi^2} m^2 \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E - \ln 4\pi \qquad (3.91)$$

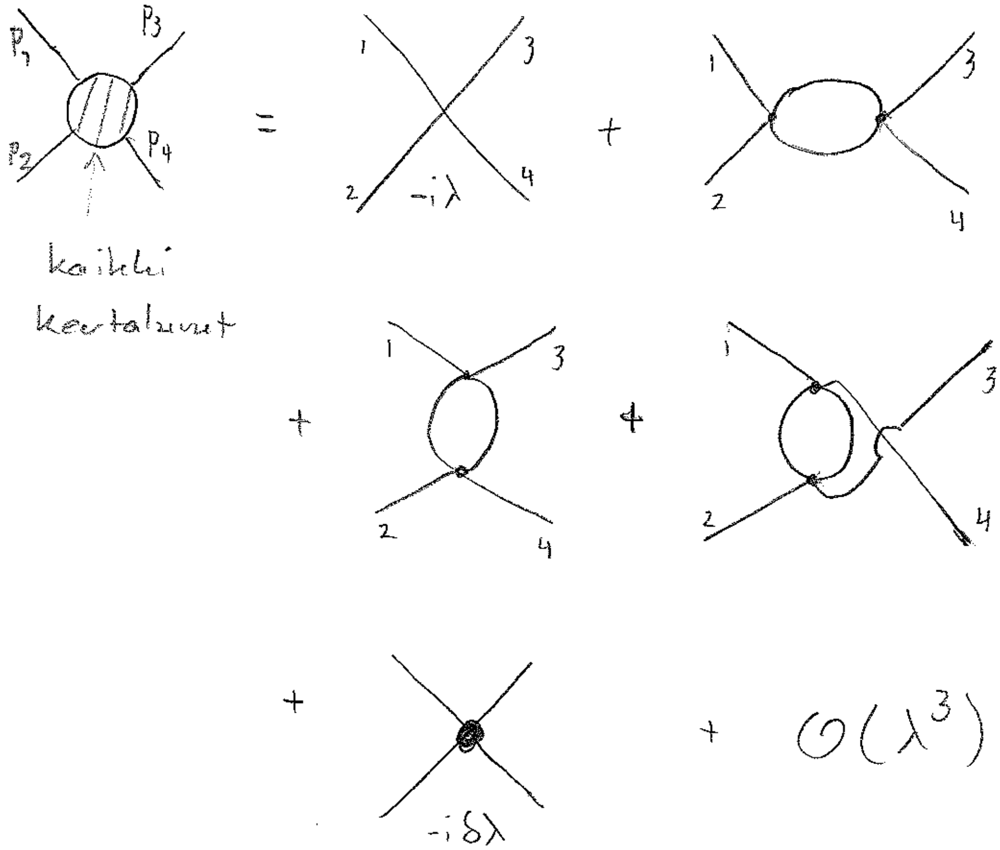
Nyt

$$m_R^2(\mu) = m^2\left(1 - \frac{\lambda}{32\pi^2}\left(1 + \ln\frac{\mu^2}{m^2}\right)\right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \qquad (3.92)$$

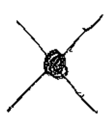
Valitsemalla vielä $\mu = m$, ln-termi häviää.

<u>Tulkinta:</u> m_R on systeemistä <u>mitattava</u> massa (observaabeli). (3.92) ja (3.90) relatoivat "paljaan massan" m^2 (Lagrangen parametri) m_R^2:een. Siis paljas massa onkin skeemasta riippuva!

Samoin voimme renormalisoida <u>4-pistefunktion:</u>
Diagrammaattisesti



Missä on lisätty vastatermi $\frac{\overbrace{\delta\lambda}^{\mathcal{O}(\lambda^2)}}{4!}\varphi^4$. Tämän Feynman-sääntö on kuten λ, siis

 $= -i\delta\lambda$ (3.43)

Amplitudi silmukalle laskettiin (3.29).
A_4 oli funktio impulssimomenteista jotka virtaavat lenkin sisään

Toisin sanoen, amputoitu 4-pistefunktio

$$G_R^{(4)}(p_1 .. p_4) = -i\lambda - i\delta\lambda + A_4(s) + A_4(t) + A_4(u) \quad (3.44)$$

missä

$$s = (p_1 + p_2)^2 \qquad \text{(Mandelstamin} \quad (3.45)$$
$$t = (p_1 + p_3)^2 \qquad \text{muuttujat)}$$
$$u = (p_1 + p_4)^2$$

eli

$$G_R^4 = -i\lambda - i\delta\lambda + \frac{3i\lambda}{32\pi^2}\Big[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + 2 + \ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}$$

$$+ F(s) + F(t) + F(u)\Big] \quad (3.46)$$

$$F(x) = -\frac{1}{3}\left[1 + \frac{4m^2}{x}\right]^{1/2} \ln\frac{\left[\frac{4m^2}{x}+1\right]^{1/2}+1}{\left[\frac{4m^2}{x}+1\right]^{1/2}-1}$$

$\delta\lambda$ määräytyy (kertaluvun λ) renormalisaatio-ehdosta.

MS-skeema

$$\delta\lambda^{MS} = \frac{3\lambda}{16\pi^2}\frac{1}{\epsilon} \quad (3.47)$$

$\overline{MS}$-skeema

$$\delta\lambda^{\overline{MS}} = \frac{3\lambda}{32\pi^2}\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi\right) \quad (3.48)$$

Usein käytetään myös ehtoja

$$G_R^{(4)}(0,0,0,0) = -i\lambda$$

tai

$$G_R^{(4)}(p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p_4^2 = -m^2) = -i\lambda$$

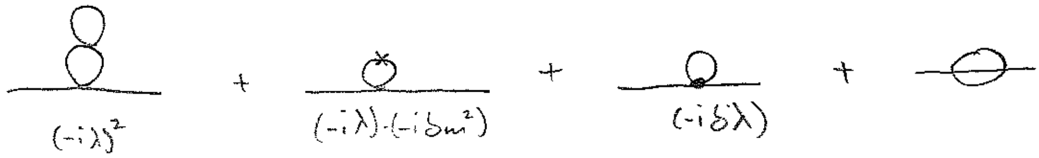
niin että siirryttäessä Minkowskin avaruuteen $p^2 = (p^0)^2 - \bar{p}^2 = m^2$, eli ollaan massakuorella.

Olemme siis löytäneet vastatermit s.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{CT} \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}(m^2 + \delta m^2)\varphi^2 - \frac{1}{4!}(\lambda + \delta\lambda)\varphi^4 \end{aligned} \tag{3.47}$$

on 1-luuppitasolla äärellinen.

Laskua voidaan jatkaa korkeampaan kertalukuun, esim. 2-pistefunktion $O(\lambda^2)$:



$(-i\lambda)^2$ + $(-i\lambda)\cdot(-i\delta m^2)$ + $(-i\delta\lambda)$ +

Nämä tuottavat $\frac{1}{\epsilon}$, $\frac{1}{\epsilon^2}$ -divergenssejä, mitkä kumotaan lisäämällä korkeamman kertaluvun korjauksia vastatermeihin.

Voimme yleensä ottaen kirjoittaa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(1+A)(\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2}(1+B) m^2 \varphi^2 + \frac{1}{4!}\lambda(1+C)\varphi^4$$

missä vastatermit A, B, C voidaan kehittää

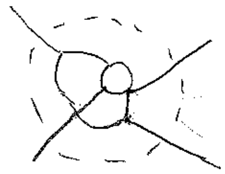
$$A = \sum_0^\infty \frac{a_n}{\epsilon^n} + \text{termejä} \to 0, \text{ kun } \epsilon \to 0$$

$$a_n = \sum_{l=1}^{n} \lambda^l f(p^2, m^2)$$

Teoria on renormalisoituva, koska kaikki vastatermit ovat alkup. muotoa.

(kopioitu 21.10)

Tarkastellaan yleistä teoriaa ja yleisen Feynmanin graafi



vertekset	V	kpl
ulkoiset jalat	E	"
sis. viivat	I	"
lenkit	L	"

Vertekset antavat impulssin säilymisrelaatioita; 1 relaatio $= \sum_{\substack{\text{ulk.}\\ \text{jalat}}} p_i = 0$. Siis I sis. impulssia toteuttaa $V-1$ relaatiota, joten

$$L = I - (V-1) \tag{3.50}$$

impulssia jää jäljelle $=$ # lenkit.

Koska lenkki-integraali $\propto p^d$ $\left(\int d^d p \sim p^d\right)$ ja propagaattori $\propto p^{-2}$, graafin näennäinen divergenssi

$$D = dL - 2I = (d-2)I - d(V-1) \tag{3.51}$$

Jos kaikissa verteksissä on N jalkaa,

$$N \cdot V = E + 2I \Rightarrow I = \tfrac{1}{2}(NV - E)$$

ja

$$D = d - \tfrac{1}{2}(d-2)E + \left(\tfrac{1}{2}(d-2)N - d\right)V \tag{3.52}$$

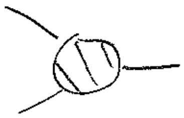
$$\left(\tfrac{1}{2}dN - N - d\right)$$

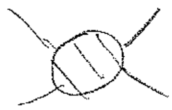
$\lambda\varphi^4$ - teoriassa $N=4$, joten

$$D = d - \frac{1}{2}(d-2)E + (d-4)V \tag{3.54}$$

kun $d=4$, aste riippuu vain E:stä:

 $D=2$ kvadraattinen

 ei esiinny

 $D=0$ log-divergenssi

Jos $D<0$, ei voida vielä automaattisesti päätellä että diagrammi konvergoi. Myös sen kaikille alidiagrammeille täytyy olla $D<0$.

Nyt esim. $\lambda\varphi^6$-teorialla $N=6$, ja

$$D = d - \frac{1}{2}(d-2)E + (2d-6)V$$

kun $d=4$, V:n kerroin $=2>0$, ja verteksien lisääminen johtaa kasvaviin divergensseihin.

$\Rightarrow$ teoria <u>ei renormalisoituva</u>

(on jos $d \leq 3$)

Yleisesti, jos $\underline{(d-2)N-2d \le 0}$ niin divergenssien määrä ei kasva äärettömäksi (ja teoria renormalisoituva).

Jos $(d-2)N-2d < 0$, diagrammojen missä E jalkaa divergenssi laskee kun lisätään verteksejä (lenkkejä). Esim. $\lambda\varphi^4$ 3-dim:

$i\lambda$

$D = 3 - \frac{E}{2} - V = 1$ lineaarinen

$D = 3-1-2 = 0$ logaritminen

$D = 3-1-3 = -1$ suppenee

(sen sijaan esim.  divergoi, koska viimeinen silmukka divergoi. Divergenssi on sama kuin )

Ehto $(d-2)N-2d \le 0$ (*) voidaan ilmaista toisin kuten:

$S = \int d^dx \left[(\partial_\mu \varphi)^2 + \dots + \lambda \varphi^N \right]$ dimensioton $\Rightarrow [\varphi] = GeV^{(d-2)/2}$

$\Rightarrow \underline{[\lambda] = GeV^{d-N(d-2)/2}}$

Eli, jos (*) voimassa, $[\lambda] = GeV^a$, $a \ge 0$.

Jos <u>kytkinvakion λ dimensio < 0</u> (energian yksiköissä), teoria <u>ei renormalisoituva</u>

4. QED

4.1. Vapaat fermionit

- Vapaa fermionikenttä ψ toteuttaa Diracin yhtälön

$$(i\not{\partial} - m)\psi(x) = 0 \tag{4.1}$$

missä $\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$ (4.2)

ja γ^μ ovat 4x4 -matriiseja jotka toteuttavat ns. Cliffordin algebran

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}\cdot\mathbb{1}} \tag{4.3}$$

$\psi(x)$ on luonnollisesti 4-komponenttivektori.

γ-matriisit eivät ole uniikkeja. Me käytämme tässä Weylin esitystä

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

missä σ^i ovat Paulin sigma-matriiseja (2x2)

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

Nämä toteuttavat $[\sigma^i, \sigma^j] = i\epsilon^{ijk}\sigma^k$

Jos $\psi(x)$ toteuttaa Diracin yhtälön, se toteuttaa myös Klein-Gordonin: kerro Dirac $(-i\not{\partial}-m)$:llä:

$$0=(-i\not{\partial}-m)(i\not{\partial}-m)\psi$$
$$=\left(\tfrac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}\partial_\mu\partial_\nu-m^2\right)\psi=(\partial^2+m^2)\psi \qquad (4.6)$$

Diracin yhtälö on Lorentz-invariantti, ψ muuntuu spin-1/2 esityksen mukaan.

ψ muuntuu kuten $\Lambda_{1/2}\psi$, missä

$$\Lambda_{1/2}=\exp\left(-\tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right) \qquad (4.7)$$

$$S^{\mu\nu}=\tfrac{i}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$$

$S^{\mu\nu}$ toteuttaa Lorentz-ryhmän kommutaatiorelaatiot sivu 5. (HT)

Nyt $\Lambda_{1/2}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{1/2}=\underbrace{\exp\left(-\tfrac{i}{2}\omega_{\sigma\rho}\mathcal{J}^{\sigma\rho}\right)^\mu{}_\nu}_{\Lambda^\mu{}_\nu}\gamma^\nu$

missä $(\mathcal{J}^{\mu\nu})_{\alpha\beta}=i(\delta^\mu{}_\alpha\delta^\nu{}_\beta-\delta^\mu{}_\beta\delta^\nu{}_\alpha)$

on 4-vektorien Lorentz-muunnosten generaattori

$\Rightarrow (i\not{\partial}-m)\psi=0$ on Lorentz-invariantti

Vapaat fermionit

Tasoaalto on Diracin yhtälön ratkaisu.
Olkoon

$$\psi = u(p,s)\, e^{-ip\cdot x} \quad , \; p^2 = m^2 \; , \; p^0 > 0 \qquad (4.7)$$

missä u on 4-komponenttinen vektori.

Nyt

$$(\not{p} - m)\, u(p) = 0 \qquad (4.8)$$

Vastaavasti jos $\psi = v\, e^{ip\cdot x}$, $p^2 = m^2$, $p^0 > 0$,
niin

$$(\not{p} + m)\, v(p) = 0 \qquad (4.9)$$

$u(p,s)$ kuvaa hiukkasia, $v(p,s)$ antihiukkasia.

Merkinnällä $\sigma = (\mathbb{1}, \vec{\sigma})$ ja $\bar{\sigma} = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma})$
(4.8) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{pmatrix} -m & p\cdot\sigma \\ p\cdot\bar{\sigma} & -m \end{pmatrix} u = 0 \qquad (4.10)$$

Nyt $(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar{\sigma}) = p^2 = m^2$, ja
(4.10):n ratkaisu on

$$u_s = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\cdot\xi_s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\cdot\xi_s \end{pmatrix} \qquad (4.11)$$

missä ξ_s on 2-komponenttivektori.

ξ_s on spin-vektori, operaattorilla

$\frac{1}{2}\hat{s}\cdot\vec{\sigma}$, $|\hat{s}|=1$, 2 ominaisarvoa $\pm\frac{1}{2}$

Esim. spin 3-akselin suuntaan : $\frac{1}{2}\sigma^3$, ja
ominaisvektorit $\xi^{+1/2} \propto \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $\xi^{-1/2} \propto \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Normitus:

Määritellään $\boxed{\bar{\psi} = \psi^{+}\gamma^{0}}$ (4.12)

Nyt $\bar{\psi}\psi$ on Lorentz-invariantti, $\psi^{+}\psi$ ei ole!

Asetetaan

$$\bar{\psi}\psi = \bar{U}U = 1 \qquad (4.13)$$

joten $\xi^{+}\xi = \frac{1}{2m}$ (Peskin $\xi^{+}\xi = 1$)

Samoin saadaan

$$v_s = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\cdot\eta_s \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\cdot\eta_s \end{pmatrix} \qquad (4.14)$$

Saamme ortogonaalisuussäännöt

$$\bar{U}^{r}(p)\; U^{s}(p) = \delta^{rs}$$
$$\bar{v}^{r}(p)\; v^{s}(p) = -\delta^{rs} \qquad (4.15)$$
$$\bar{U}^{r} v^{s} = \bar{v}^{r} U^{s} = 0$$
$$(U^{r})^{+} U^{s} = p^{0}/m\;\delta^{rs} = E_{\bar{p}}/m\;\delta^{rs}$$

Spin-summat:

$$\underline{\sum_s u^s(p)\,\bar{u}^s(p)} = 4\times 4\text{-matriisi}$$

$$= \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} m & p\cdot\sigma \\ p\cdot\bar{\sigma} & m \end{pmatrix} = \underline{\frac{\not{p}+m}{2m}} \qquad (4.15)$$

sillä $\sum_s \xi_s \xi_s^{+} = \frac{1}{2m}$

Esiintyy usein laskuissa.

Samoin

$$\sum_s v^s\,\bar{v}^s = \frac{\not{p}-m}{2m} \qquad (4.16)$$

4.2 Polkuintegraali fermioneille

Fermionien kanonisten antikommutaatiorelaatioiden vuoksi fermionivaikutus kirjoitetaan antikommutoivien Grassmann-lukujen avulla: olkoon

c_i joukko Grassmann-lukuja; nyt

$$c_i c_j = -c_j c_i \iff \{c_i, c_j\} = 0 \tag{4.17}$$

Siis $c^2 = 0$ Grassmann-luvuille.

Samoin funktiolle $f(c)$

$$f(c) = f(0) + f'(0)\cdot c = A + Bc \tag{4.18}$$

Jos f on N Grassmann-luvun funktio,

$$f(c_1 \ldots c_N) = f^{(0)} + f_i^{(1)} c_i + f_{ij}^{(2)} c_i c_j + \ldots + f^{(n)} c_1 c_2 \ldots c_N \tag{4.19}$$

Määritellään myös derivaatta

$$\left\{\frac{\partial}{\partial c_i}, c_j\right\} = \delta_{ij}, \quad \left\{\frac{\partial}{\partial c_i}, \frac{\partial}{\partial c_j}\right\} = 0 \tag{4.20}$$

ja integraali

$$\int dc_i = 0, \quad \int dc_i\, c_j = \delta_{ij} \tag{4.21}$$

Tämä vastaa $\int_{-\infty}^{\infty} d\varphi$ skalaarikentälle

Vielä integrointijärjestys:

$$\int dc_1 dc_2\, c_2 c_1 = 1 = -\int dc_2 dc_1\, c_2 c_1 \tag{4.22}$$

Määritellään kompleksiset Grassmann-luvut

$$\theta = \frac{\theta_1 + i\theta_2}{\sqrt{2}}, \quad \theta^* = \frac{\theta_1 - i\theta_2}{\sqrt{2}} \tag{4.23}$$

missä θ_1 ja θ_2 "reaalisia" Grassmann-lukuja.

Nyt

$$(\theta\eta)^* \underset{\text{määr.}}{\equiv} \eta^*\theta^* = -\theta^*\eta^* \tag{4.24}$$

Kuten z, z^*, myös Grassmann-luvuille θ, θ^* riippumattomia.

Gaussinen integraali:

$$\int d\theta^* d\theta \, e^{-b\theta^*\theta} = b \tag{4.25}$$

Jos M on $N\times N$-matriisi, niin

$$\underline{\int [\prod_i^N d\theta_i^* d\theta_i] \, e^{-\theta_i^* M_{ij} \theta_j}} = \int [\prod d\theta^* d\theta] (\cancel{1}^{0} - \cancel{\theta^{*T} M \theta}^{0} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^N}{N!} (\theta_i^* M_{ij} \theta_j)^N)$$

$$= \frac{1}{N!} \epsilon^{ijk\ldots} \epsilon^{abc\ldots} M_{ia} M_{jb} \ldots$$

$$= \epsilon^{ijk\ldots} M_{i1} M_{j2} \ldots = \underline{\det M} \tag{4.26}$$

Samoin (χ, χ^* Grassmann)

$$\int [\prod d\theta^* d\theta] \, e^{-\theta^{*T} M \theta + \theta^* \chi + \chi^* \theta} = Z \tag{4.27}$$

Sij. $\theta \to \theta - M^{-1}\chi$; $\theta^{*T} \to \theta^{*T} - \chi^{*T} M^{-1}$

saamme

$$\int [\Pi d\theta^* d\theta]\, e^{-\theta^{*T} M \theta + \theta^* \chi + \chi^* \theta}$$

$$= \int [\Pi d\theta^* d\theta]\, e^{-\theta^{*T} M \theta - \chi^{*T} M^{-1} \chi} = \underline{\det M \cdot e^{-\chi^{*T} M^{-1} \chi}} \tag{4.28}$$

Siis saamme

$$\frac{-d}{d\chi_i^*} \frac{d}{d\chi_j} Z \Big|_{\chi=0} = \int [\Pi d\theta^* d\theta]\; \theta_i \theta_j^* e^{-\theta^{*T} M \theta}$$

$$= \underline{\underline{\det M \cdot (M^{-1})_{ij}}} \tag{4.29}$$

Kirjoitetaan vapaan fermionikentän "klassinen" vaikutus

$$S[\psi, \bar\psi] = \int dx\; \bar\psi (i\not\partial - m) \psi \tag{4.30}$$

$\bar\psi = \psi^\dagger \gamma^0$, ψ Grassmann 4-spinoreita.
$\bar\psi$ ja ψ ovat riippumattomia, ja liikeyhtälö (Dirac) saadaan varioimalla $\bar\psi$:n suhteen.

Polkuintegraali Grassmann-lähteiden $\varsigma, \bar\varsigma$ avulla:

$$\underline{Z[\varsigma, \bar\varsigma] = Z[0]^{-1} \int D\psi D\bar\psi\; e^{iS[\psi,\bar\psi] + i\int dx (\bar\varsigma \psi + \bar\psi \varsigma)}} \tag{4.31}$$

Täydentämällä $\Box$:ksi ja integroimalla (4.27), (4.28) saamme

$$Z[\rho, \bar{\rho}] = \exp\left[-\int d^4x\, d^4y\, \bar{\rho}(x)\, S_F(x-y)\, \rho(y)\right] \qquad (4.32)$$

missä Feynmanin propagaattori

$$S_F(x-y) = \text{“} \frac{i}{i\cancel{\partial} - m} \text{”} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\cancel{p} - m + i\epsilon} e^{-ip\cdot(x-y)} \qquad (4.33)$$

missä edelleen

$$\frac{1}{\cancel{p} - m + i\epsilon} = \frac{\cancel{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \qquad (4.34)$$

Siis S_F on Diracin yhtälön Greenin funktio,

$$(i\cancel{\partial} - m) S_F(x-y) = i\,\delta(x-y)$$

Kiraalisymmetria

Jos $m = 0$, kirjoittamalla $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$

ψ_L ja ψ_R eivät sekoitu vaikutuksessa (4.30)

Määrittelemällä

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad (4.35)$$

← Weylin esitys

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad ; \quad (\gamma^5)^2 = 1$$

$$\gamma^{5\dagger} = \gamma^5 \quad ; \quad (\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \ \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i)$$

näemme että vaikutus (4.30) on invariantti muunnoksissa

$$\text{A)}\quad \psi \to e^{i\theta}\psi \quad ; \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi}e^{-i\theta}$$

ja

$$\text{B)}\quad \psi \to e^{i\theta\gamma^5}\psi \quad ; \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi}e^{i\theta\gamma^5} \tag{4.36}$$

A) on voimassa myös jos $m \neq 0$, sitä vastaava Noetherin virta

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{4.37}$$

vastaa säilyvää (sähkö)varaustiheyttä.

B) on symmetria vain jos $m = 0$. Tätä sanotaan <u>kiraalisymmetriaksi</u>. Tätä vastaa Noetherin virta, <u>aksiaalivektorivirta</u>

$$j^{5\mu} = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \tag{4.38}$$

Projektio-operaattorit $\frac{1}{2}(1-\gamma^5)$ ja $\frac{1}{2}(1+\gamma^5)$ projisoivat ψ_L:n ja ψ_R:n ψ:stä.

4.3 U(1) mittakenttä

Sähkömagneettista kenttää kuvataan Lagrangen tiheydellä

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{4.39}$$

missä $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, A_μ mittakenttä.

Tämä kytketään varattuihin fermioneihin (tai skalaareihin) käyttämällä kovarianttia derivaattaa

$$\partial_\mu \Rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \tag{4.40}$$

Tämän avulla voimme kirjoittaa (elektroni) QED:n Lagrangen

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{4.41}$$

$$\not{D} = \gamma^\mu D_\mu$$

Voimme johtaa A_μ:lle liikeyhtälön

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\nu} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi = j^\nu} \tag{4.42}$$

Käyttämällä $F^{0i} = E^i$; $F^{ij} = \epsilon^{ijk} B^k$

saamme (4.42) $\Rightarrow$ Maxwellin yhtälöt. (HT)

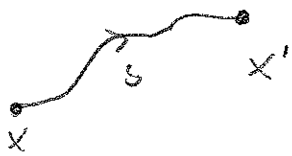
j^0 = sähkövaraustiheys, j^i = virtatiheys

e = elektronin varaus (dimensioton kun $\hbar = c = 1$)

Lagrangen tiheys on $U(1)$-mittainvariantti lokaaleissa muunnoksissa

$$\begin{cases} \psi \to e^{i\Lambda(x)}\psi \\ \bar{\psi} \to \bar{\psi}\, e^{-i\Lambda(x)} \\ A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda \end{cases} \qquad (4.43)$$

A_μ kuvaa vaihekulman muutosta kun kompleksivektoria siirretään adiabaattisesti polkua s pitkin:



$$\varphi \to e^{ie\int_x^{x'} ds^\mu A_\mu}\varphi$$

infinitesimaalisesti $\varphi \to (1 + ie\,\Delta s^\mu A_\mu)\varphi$

Jos kuljetus tehdään pienen $\mu\nu$-tason neliön ympäri,

$$\varphi \to (1 + \Delta s^\mu \Delta s^\nu F_{\mu\nu})\varphi$$

$F^{\mu\nu} = 0$ kulma ei muutu, kaarevuus $= 0$.
(vrt. yleinen suhteellisuusteoria).

$F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow A_\mu$ puhdas mitta, eli muunnettavissa $A_\mu \to 0$ mittamuunnoksella.

Mitan kiinnitys

Jotta voimme laskea fotonipropagaattorin, meidän tulee päästä eroon mittaekvivalenteista konfiguraatioista $A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda$.

Tämä saadaan aikaan Faddeev-Popov menetelmällä: Olkoon $G(A) = 0$ ehto joka kiinnittää Λ:n, esim. $G(A) = \partial_\mu A^\mu = 0$ (Lorentz-mitta).

Asetetaan nyt $\int DA(x) \to \int DA(x)\, \delta(G(A))$, (4.94)

missä δ-funktio kiinnittää $G(A) = 0 \quad \forall x$.

(tarkkaan ottaen tästä tulee myös Jacobin determinantti $\left\|\frac{\partial G}{\partial A}\right\|$, mutta QED:ssä tämä ei vaikuta)

olkoon nyt $G(A) = \partial_\mu A^\mu(x) - \omega(x)$ (4.95)

missä $\omega(x)$ on skalaarifunktio. Koska (4.95) kiinnittää mitan $\forall\, \omega(x)$, voimme integroida ω yli painofunktiolla $e^{-\omega^2/\xi}$, s.e. $\omega(x) = 0$ dominoi:

$$\int DA\, \delta(G(A)) \to \int D\omega(x) \int DA(x)\, e^{-i\int d^4x \frac{\omega(x)^2}{2\xi}}\, \delta(G(A))$$

$$= \int DA(x)\, e^{-i\int d^4x \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2} \qquad (4.96)$$

Tässä ξ on vahio.

Nyt mittakentälle (vapaalle)

$$Z = \int DA \exp\left[i\int d^4x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2\right]\right]$$

$$= \int DA \exp\left\{i\int d^4x \,\frac{1}{2}A_\mu\left[\partial^2\eta^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\right]A_\nu\right\} \qquad (4.47)$$

$$= \int DA(k) \exp\left\{\frac{i}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\tilde{A}_\mu(k)\left[-k^2\eta^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\right]\tilde{A}_\nu(-k)\right\}$$

Lisäämällä vaikutukseen lähdetermi

$$\mathcal{L} \to -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + J_\mu A^\mu$$

täydentämällä $Z[J]$ neliöksi ja integroimalla saamme jälleen $Z[J] = \exp\left[-\frac{1}{2}\int dx\, dy\, J_\mu(x)\, D_F^{\mu\nu}(x-y)\, J_\nu(y)\right]$ missä $D_F^{\mu\nu}$ on fotonipropagaattori.

Voimme myös lukea D_F:n suoraan (4.49)

$$\left(-k^2\eta_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\right)\tilde{D}_F^{\nu\rho} = i\,\delta_\mu{}^\rho \qquad (4.48)$$

mistä saamme

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2+i\epsilon}\left[\eta^{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right] \qquad (4.49)$$

Huom! $-i$, skalaarin prop. oli $+i$!

$$\left.\begin{array}{l} \xi = 1 \;:\; \text{Feynmanin mitta} \\ \xi = 0 \;:\; \text{Landaun mitta} \end{array}\right\} \text{suosittuja valintoja.}$$

Jälleen

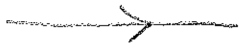
$$D_F^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \, \tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) \, e^{-ik\cdot(x-y)}$$

toteuttaa

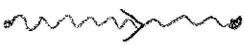
$$\left[\partial^2 \eta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\right] D_F^{\nu\rho}(x-y) = i \delta_\mu^{\ \rho} \, \delta(x-y)$$

Minkä tahansa mittainvariantin suureen laskun tulos ei riipu ξ:n valinnasta.

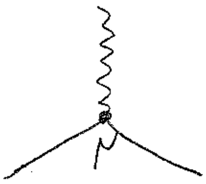
Yhdistämällä tulokset voimme johtaa QED:n Feynmanin säännöt: (impulssiavaruudessa)


p

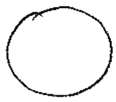
$\dfrac{i}{\not p - m + i\epsilon}$ elektroni


μ p ν

$\dfrac{-i\eta_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$ fotoni (Feynmanin mitta)



$-ie\gamma^\mu$ verteksi


suljettu fermioni-lenkki

$\int \dfrac{d^4k}{(2\pi)^4} \cdot (-\mathrm{Trace})$


fotonilenkki

$\int \dfrac{d^4k}{(2\pi)^4}$

anti-e

Ulkoinen elektroni $u(p,s)$ (sisään) $\bar{v}(p,s)$

$\bar{u}(p,s)$ (ulos) $v(p,s)$

ulkoinen fotoni ϵ_μ , ϵ^*_μ

sisään ulos

+ Fermioneista tuleva etumerkki

$\epsilon_\mu(p,\nu)$ on polarisaatiovektori, siis

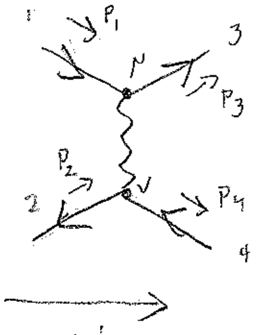
$$A_\mu = \epsilon_\mu e^{-ip\cdot x}.$$

Ulkoiset fotonit ovat <u>transversaalisesti</u> polarisoituneita, ts. $p\cdot\epsilon = 0$. niillä on 2 polarisaatiotilaa,

$$\sum_{\text{polarisaatiot}} \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu \to -\eta_{\mu\nu} \qquad (4.50)$$

Esimerkkejä

e^+e^- -sironta



aika

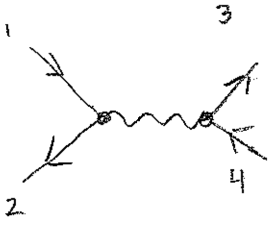
$$= \left(\bar{u}(p_3)(-ie\gamma^\mu)u(p_1)\right)\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1-p_2)^2+i\epsilon}\times\left(\bar{v}(p_2)(-ie\gamma^\nu)v(p_4)\right)$$

Symmetriatekijä:

1 menee 2 verteksin jalkaan

$$\frac{2\cdot 1\cdot 1\cdot 1}{2!} = 1$$

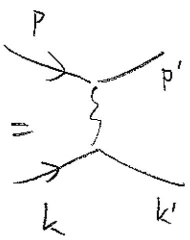
(4!) ei esiinny!



$$= \left(\bar{v}(p_2)(-ie\gamma^\mu)u(p_1)\right)\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1+p_2)^2+i\epsilon}\left(\bar{u}(p_3)(-ie\gamma_\nu)v(p_4)\right)$$

4.4. Coulomb-potentiaali

- lasketaan 1-fotonivaihto 2 elektronin välillä:

$$iM = $$  $$= (-ie)^2 \left(\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)\right) \cdot \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p'-p)^2} \left(\bar{u}(k')\gamma^\nu u(k)\right)$$

Vertehsi

e^- sisään ja ulos = kompleksiluku

- Ei-relativistinen raja: $p^0 \simeq m \gg p^i$

$$\bar{u}(p')\gamma^i u(p) \ll \bar{u}(p')\gamma^0 u(p) = u^\dagger(p')u(p) \simeq \frac{E_p}{m} \simeq 1$$

$\overset{\shortparallel}{0}$ jos $\bar{p}' = \bar{p} = 0$

myös $(p'-p)^2 \simeq -|\bar{p}'-\bar{p}|^2$

ja $iM \simeq -ie^2 \dfrac{1}{(\bar{p}'-\bar{p})^2} = -iV(\bar{q})$ (Bornin approksimaatio)

Fourier-muunnos antaa

$$V(\bar{x}) = \int \frac{d^3\bar{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^2}{\bar{p}^2} e^{i\bar{p}\cdot\bar{x}}$$

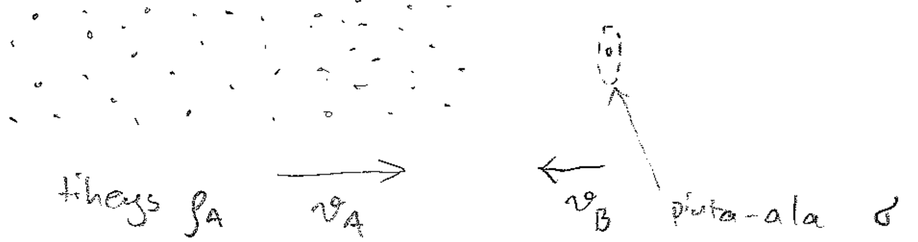
$$= \frac{e^2}{4\pi^2}\int_0^\infty dp\, p^2 \frac{e^{ipr}-e^{-ipr}}{ipr\cdot p^2} = \frac{e^2}{4\pi^2 ir}\int_{-\infty}^{\infty} dp\, \frac{e^{ipr}}{p}$$

$$= \frac{e^2}{4\pi r} = \frac{\alpha}{r} \qquad \alpha = e^2/4\pi = 1/137$$

- Hylkivä Coulomb-potentiaali. OK.
- Jos antihiuk. → vetovoima (palaan myöh.)

4.5 Vaikutusala ja S-matriisi

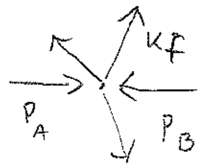
• Vaikutusala: "pinta-ala missä törmäys tapahtuu"



• Hiukkasten A lkm σ:n läpi, eli törmäysten lkm:

$$N = \sigma \cdot \rho_A |v_A - v_B| \cdot \underset{\uparrow \text{aika}}{\tau}$$

• Differentiaalinen vaikutusala:



$$\frac{d\sigma}{\prod_f dk_f} \quad ; \quad \sigma = \int dk_f \frac{d\sigma}{dk_f}$$

• Kuinka vaikutusala lasketaan kenttäteorioissa?

hiuk. A, B → N hiuk.

$$\boxed{d\sigma = \frac{1}{2E_A 2E_B |v_A - v_B|} \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \times |M|^2 (2\pi)^4 \delta\Big(p_A + p_B + \sum_f p_f\Big)}$$

(4.50)

missä

$$\boxed{iM(p_{A,B} \to p_f) = \sum \left(\begin{array}{l} \text{amputoidut, yhtenäiset} \\ \text{Feynmanin diagrammit} \end{array} \right)}$$

- kaikki hiuk. tuovat $\frac{1}{2E}$
- $\left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \right) \cdot \delta\big(P - \sum_f p_f\big)$ Lorentz-invariantti faasiavaruus

Mistä tulee?

$$\underset{ulos}{\langle \bar p_f |} \bar p_i \rangle_{sisään} = \langle \bar p_f | \hat S | \bar p_i \rangle = \underline{S\text{-matriisi}}$$

- S voidaan jakaa osiin $\underline{S = \mathbb{1} + iT}$, missä iT on kiinnostava sironta-osa. Nyt

$$\langle \bar p_f | iT | \bar p_i \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{TOT})\, i\mathcal{M}(p_i \to p_f) \qquad (4.51)$$

$i\mathcal{M}$ = summa amputoiduista Feynmanin diagrammoista.

- Nyt vapaalle hiulle $|\bar p\rangle = \sqrt{2E_{\bar p}}\, a^\dagger_{\bar p}|0\rangle$. Näin siksi jotta $\langle 0|\varphi(x)|\bar p\rangle = e^{ip\cdot x}$ (katso (2.7))

Siis 1-hiukkastiloille $\mathbb{1} = \int \frac{d^3\bar k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\bar k}} |\bar k\rangle\langle \bar k|$.

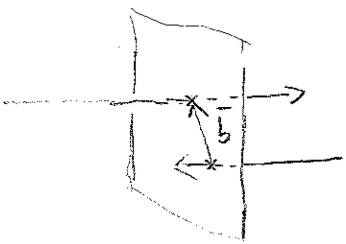
Tällä normituksella differentiaalinen todennäköisyys

$$P(A,B \to f) = \underbrace{\left(\prod_f \frac{d^3\bar p_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\bar p_f}}\right)}_{\equiv \{dp_f\}} \left|\langle \bar p_1 \cdots \bar p_n | iT | \bar p_A \bar p_B \rangle\right|^2 \qquad (4.52)$$

Nyt, edellisen sivun systeemissä, meillä on yksi B-hiuk ja tiheys ρ_A A-hiukja. Törmäysten lukumäärä ajossa τ

$$N = \sum_{ohitukset} P_i = \tau |v_A - v_B| \rho_A \int d^2b\, P(b)$$

missä $\vec b$ on impaktiparametri. Siis



$$\sigma = \int d^2b\, P(b)$$

Jotta saamme hommasta tolkkua korvataan alkutila $|k_A, k_B\rangle$ aaltopaketeilla jotka ovat k_A:n ja k_B:n ympärillä; ja ϕ_A^b:llä on törmäysparametri b.

$$|\phi_A^b \phi_B\rangle = \underbrace{\int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{\phi_A^b(\bar{k})}{\sqrt{2E_{\bar{k}}}}}_{\int_{\bar{k}} \phi_A(\bar{k})} \int \frac{d^3\bar{p}}{(2\pi)^3} \frac{\phi_B(\bar{p})}{\sqrt{2E_{\bar{p}}}} \, |\bar{k}\,\bar{p}\rangle$$

Siis

$$d\sigma = \{dp_f\} \int d^2 b \int_{\bar{k}_A} \phi_A^b(\bar{k}_A) \int_{\bar{k}_B} \phi_B(\bar{k}_B) \int_{\bar{k}'_A} \phi_A^{b*}(k'_A) \int_{\bar{k}'_B} \phi_B^*(k'_B)$$

$$\times \langle p_f | iT | k_i \rangle (\langle p_f | iT | k'_i \rangle)^* \qquad (4.53)$$

Integraali törmäysparametrin yli antaa δ-funktion $(2\pi)^2 \delta^{(2)}(k_A^\perp - k_A'^\perp)$. Tämä tulee siitä että voimme olettaa $\phi_A^b(\bar{k}_A) \to \phi_A^0(\bar{k}_A) e^{i k_A^\perp \cdot \bar{b}}$, eli aaltopaketti on sama $\bar{b}$:stä riippumatta, vain shiftattu. $\langle|\rangle$-tekijät antavat myös δ-funktioita (4.51). Voimme integroida $\bar{k}'_A$:n ja $\bar{k}'_B$:n yli; saamme $\bar{k}'^{\perp}_B = k_B^\perp$ ja

$$\int dk'^z_A \, dk'^z_B \, \delta(k'^z_A + k'^z_B - \sum_f p_f^z) \, \delta(E'_A + E'_B - \sum_f E_f)$$

$$= \int dk'^z_A \, \delta\left(\sqrt{\bar{k}_A^2 + m_A^2} + \sqrt{\bar{k}'^2_B + m_B^2} - \sum E_f\right) \qquad k'^z_B = \sum p_f^z - k'^z_A$$

$$= \left| \frac{k'^z_A}{E'_A} - \frac{k'^z_B}{E'_B} \right|^{-1} = |v_A - v_B|^{-1} \qquad (4.54)$$

k-integraaleista jää jäljelle

$$\int \frac{d^3\bar{k}_A}{(2\pi)^3} \frac{|\phi_A(k_A)|^2}{2E_{\bar{k}_A}} \to \frac{1}{2E_A}$$

jos $\phi_A(\bar{k}_A)$ on piikittynyt p_A:n ympärille.

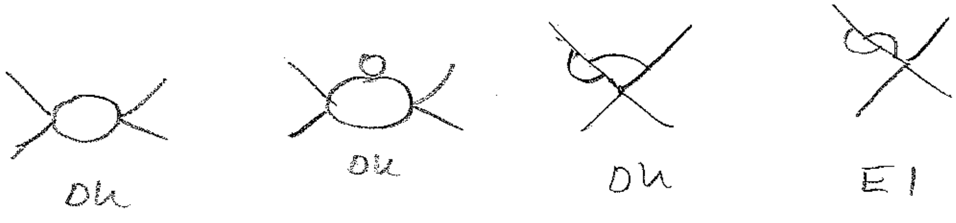
Siis $\Rightarrow$ (4.50).

Amputoitujen diagrammojen ulkoiset jalat eivät saa sisältää luuppikorjauksia: esim.

nuolella merkitty propagaattori antaa $\frac{i}{p^2-m^2} = \infty$, sillä $p = p_1$ ja $p_1^2 = m^2$.

ko. diagrammassa silmukka kuuluu itse asiassa yksihiukkastilan vakuuteeseen vuorovaikuttavassa teoriassa, siis tilaan $|p\rangle$.

Esim.



Jos lopputilassa on 2 hiukkasta, voimme siirtyä CM-koordinaatistoon missä $\bar{p}_2 = -\bar{p}_1$, ja

$$\int_0^\infty \frac{dp_1}{(2\pi)^3} p_1^2 \, d\Omega \frac{1}{2E_1 2E_2} (2\pi) \delta(E_{CM} - E_1 - E_2)$$

missä $E_1 = \sqrt{p_1^2 + m_1^2}$, $E_2 = \sqrt{p_1^2 + m_2^2}$

$$= \int d\Omega \frac{p_1^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left(\frac{p_1}{E_1} + \frac{p_1}{E_2} \right)^{-1} = \int d\Omega \frac{1}{16\pi^2} \frac{p_1}{E_{CM}}$$

missä puolestaan p_1 toteuttaa $E_1 + E_2 = E_{CM}$.

Siis nyt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{1}{2E_A 2E_B |v_A - v_B|} \frac{|\bar{p}_1|}{(2\pi)^2 4E_{CM}} |M|^2 \qquad (4.55)$$

Jos vielä $m = m_A = m_B = m_1 = m_2$, $2E_A = 2E_B = 2E_1 = E_{CM}$

$|v_A - v_B| = 2|v_A|$ ja $|\bar{p}|/|v| = E$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 E_{CM}} |M|^2 \qquad (4.56)$$

Siis esim. $\lambda\varphi^4$ -teoriassa $2 \to 2$ sironta

$$iM = $$

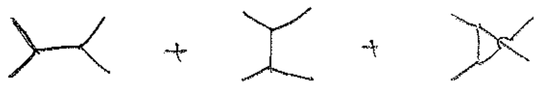
$$= -i\lambda \quad (+\,\mathcal{O}(\lambda^2))$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{CM}} \quad , E_{CM} = 2\sqrt{p^2+m^2}$$

Tai $\lambda\varphi^3$ $2 \to 2$ sironta kertaluvussa λ^2:

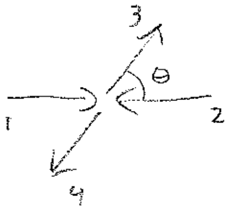
s t u Mandelstam

$\frac{6\cdot 2\cdot 3\cdot 2}{(3!)^2\cdot 2!}$

$$iM = $$


$$= (-i\lambda)^2\left(\frac{i}{(p_1+p_2)^2-m^2} + \frac{i}{(p_1-p_3)^2-m^2} + \frac{i}{(p_1-p_4)^2-m^2}\right)$$

CM-frame: $\bar{p}_2 = -\bar{p}_1 \Rightarrow (p_1+p_2)^2 = 4p^{0\,2} = 4E_1^2.$



$$(p_1-p_3)^2 = -(\bar{p}_1-\bar{p}_3)^2 = -2p^2 + 2\bar{p}_1\cdot\bar{p}_3$$
$$= -2p^2(1-\cos\theta)$$
$$(p_1-p_4)^2 = -2p^2(1+\cos\theta)$$

$$\Rightarrow iM = -i\lambda^2\left(\frac{1}{4p^2+3m^2} + \frac{-1}{2p^2(1-\cos\theta)+m^2} + \frac{-1}{2p^2(1+\cos\theta)+m^2}\right)$$

Asetetaan $m=0$: $iM = i\lambda^2\,\dfrac{\sin^2\theta - 4}{4p^2\sin^2\theta}$ $\leftarrow \infty$ jos $\theta \to 0$, johtuu $m \to 0$ ja t-kanava.

ja $d\sigma \propto |M|^2$

4.6 Fermionietumerkki

- Fermioneja sisältävät diagrammit saavat vielä etumerkin ±1, jota em. Feynmanin säännöt eivät sisällä.

- Jos 1 diag., normaalisti ei väliä; mutta jos iM:ssä enemmän kuin 1 graafi merkittävä.

Esim. $G^{(4)}(x_1,x_2;x_3,x_4) = \langle 0|T(\psi(x_1)\psi(x_2)\bar\psi(x_3)\bar\psi(x_4))|0\rangle$

- Vaikutuksen lähdetermit ovat $e^{i\int dx(\bar J\psi+\bar\psi J)} = A$

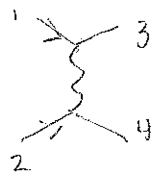
joten $\frac{-i\partial}{\partial\bar J_x}A = \psi_x A$; $\frac{i\partial}{\partial J_y} = \bar\psi_y A$ (4.57)

ja $\frac{-i\partial}{\partial\bar J_x}\frac{i\partial}{\partial J_y}A = \psi_x\bar\psi_y A$ jne.

Siis $G^{(4)}(x_1 x_2 ; x_3 x_4) = \underline{\bar\partial_1\bar\partial_2\partial_3\partial_4 Z[J]}\Big|_{J=0}$

missä $\bar\partial_1 \equiv \frac{-\partial}{\partial\bar J(x_1)}$; $\partial_3 = \frac{-i\partial}{\partial J(x_3)}$

- Katsotaan nyt esim. graafia



(*)

- Lagrangen vuorovaikutusosa on

$$\mathcal{L}_I(\bar\psi,\psi) = \bar\psi_x ie\slashed{A}_x\psi_x$$

- Nyt $Z[J] = e^{i\int dx\,\mathcal{L}_I\left(\frac{i\partial}{\partial J_x},\frac{-i\partial}{\partial\bar J_x}\right)} Z_0[J]$ (4.58)

Siis graafiin (*) tarvitsemme 2 vertexiä, ja $\exp i d\mathcal{I}$ on kehitettävä 2 kertalukuun.

- Nyt pidetään lukua vain Grassman-lukujen antamasta merkistä. Siis merkitään

$$\left(\frac{i\partial}{\partial J_x}\, ie\not{A}\, \frac{-i\partial}{\partial \bar{J}_x}\right) \to (\partial\bar{\partial})_x$$

- Siis $G^{(4)} = \bar{\partial}_1\bar{\partial}_2\partial_3\partial_4 \int_x\int_y (\partial\bar{\partial})_x (\partial\bar{\partial})_y\, Z_0[J]\Big|_{J=0}$

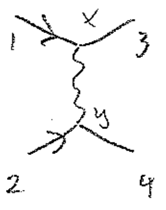
- $Z_0[J] = e^{-\int dx dy\, \bar{J}_x S_F(x-y) J_y}$

joten jokainen $\bar{\partial}_x$ antaa $\int dy'\, S_F(x-y') J(y')$.

Tähän on operoitava kerran ∂_y:llä, jotta saamme propagaattorin $S_F(x-y)$.

- Merkitään $\underbrace{\bar{\partial}_y\, \partial_x}_{\text{kontraktio.}}\, Z_0[J] = S_F(y-x)\, Z_0[J] \xrightarrow[J\to 0]{} S_F(y-x)$

- Graafi kontrahoidaan



$$\bar{\partial}_1\bar{\partial}_2\partial_3\partial_4\, \overbrace{(\partial\bar{\partial})_x}^{\text{verteksi}}\, (\partial\bar{\partial}_y)\quad Z_0$$

- Permutoidaan derivaatat niin että saadaan

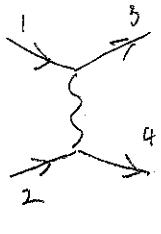
$$\bar{\partial}\partial\quad \bar{\partial}\partial \;\cdots\; \bar{\partial}\partial\; Z. \qquad \to (-1)^{\#\,\text{perm.}}$$

Helpoiten tämä käy vain vaihtamalla ∂:n paikkoja kunnes $\sqcup$:t eivät leikkaa.

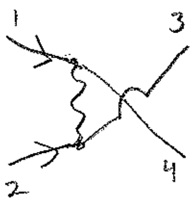
Siis jos vaihdetaan $\bar{\partial}_1 \Leftrightarrow \partial_4$, viivat eivät leikkaa $\to (-1)$

lisäksi $\partial_a \bar{\partial}_b = -\bar{\partial}_b \partial_a$. Näitä 2 $\to (-1)^2$

Siis



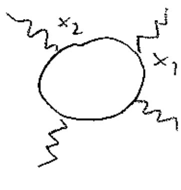
$$\bar{\partial}_1 \bar{\partial}_2 \partial_3 \partial_4 (\partial\bar{\partial})_x (\partial\bar{\partial})_y \to (-1)$$



$$\bar{\partial}_1 \bar{\partial}_2 \partial_3 \partial_4 (\partial\bar{\partial})_x (\partial\bar{\partial})_y \to (+1)$$

erilainen merkki!

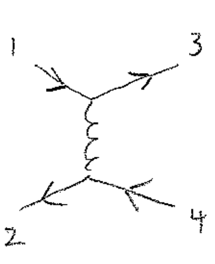
Ja suljettu lenkki - ei ulkoisia jalkoja



$$(\partial\bar{\partial})_{x_1} (\partial\bar{\partial})_{x_2} (\partial\bar{\partial})_{x_3} \cdots (\partial\bar{\partial})_{x_n}$$

Yksi $\partial\bar{\partial} \to \partial\bar{\partial} \Rightarrow (-1)$, eli $-$trace

Antihiukkanen:

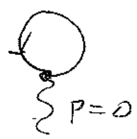


$$\bar{\partial}_1 \partial_2 \partial_3 \bar{\partial}_4 (\partial\bar{\partial})_x (\partial\bar{\partial})_y \to (+1)$$

Tässä oli sama järjestys $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ kuin yllä, jotta tulos olisi vertailukelpoinen.

• Huom: kontraktio

$$(\partial_x \bar{\partial}_x) \longrightarrow$$

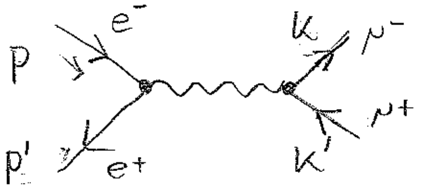


mikä ei esiinny QED:n sironnassa.

• Samoin suora ulkoisten jalkojen keskinäinen kontraktio → epäyhtenäinen diagramma. Ei tarpeen.

4.7 Perusprosesseja

$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ Feynmanin mitassa



$$\bar v^{s'}(p')(-ie\gamma^\mu)u^s(p)\,\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p+p')^2}\times$$
$$\bar u^{r}(k)(-ie\gamma^\nu)v^{r'}(k') = iM$$

M^* varten tarvitsemme

$$(\bar v\gamma^\mu u)^* = u^\dagger\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 v = u^\dagger\gamma^0\gamma^\mu v = \bar u\gamma^\mu v \qquad (4.59)$$

Siis

$$|M|^2 = \frac{e^4}{(p+p')^4}\left(\bar v(p')\gamma^\mu u(p)\,\bar u(p)\gamma^\nu v(p')\right)\left(\bar u(k)\gamma_\mu v(k')\,\bar v(k')\gamma_\nu u(k)\right)$$

Jos nyt ei havaita alku/loppu -spintiloja, summataan kaikkien s, r, s', r' -indeksien yli. Nyt (4.15)

$$\sum_s u^s(p)\bar u^s(p) = \not p + m$$
$$\sum_s v^s(p)\bar v^s(p) = \not p - m \qquad (4.60)$$

Huom! Normitus (4.15) muuttunut! $\bar u u = 2m$

Siis

$$\frac{1}{2}\sum_s \frac{1}{2}\sum_{s'}\sum_r\sum_{r'} |M|^2$$

summa lopputiloista

keskiarvo alkutilojen spineistä!

$$\text{Nyt}\quad (\bar v\gamma^\mu u\bar u\gamma^\nu v) = tr(\bar v\gamma^\mu u\bar u\gamma^\nu v)$$
$$= tr(\gamma^\mu u\bar u\gamma^\nu v\bar v) \qquad (4.61)$$

joten spin-summan jälkeen

$$|M|^2 = \frac{1}{4}\frac{e^4}{(p+p')^4}\,\mathrm{tr}\left[\gamma^\mu(\not p+m)\gamma^\nu(\not p'-m)\right]\,\mathrm{tr}\left[\gamma_\mu(\not k'-m_\mu)\gamma_\nu(\not k+m_\mu)\right]$$

Nyt $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - 4\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + 4\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}$

joten $\mathrm{tr}[\gamma^\mu \not p \gamma^\nu \not p'] = 4p^\mu p'^\nu + 4p^\nu p'^\mu - 4\eta^{\mu\nu}\, p\cdot p'$

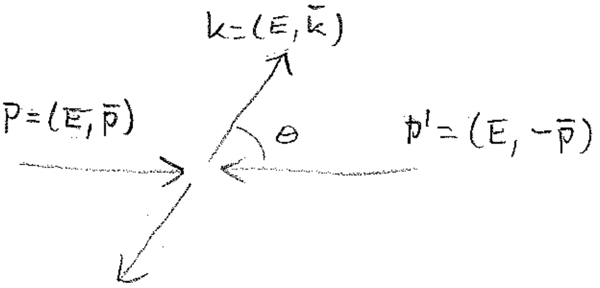
$\mathrm{tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu m^2] = 4\eta^{\mu\nu} m^2$

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spin}}|M|^2 = \frac{4e^4}{(p+p')^4}\left(2\,p\cdot k\;p'\cdot k' + 2p\cdot k'\;p'\cdot k + 2m_\mu^2\, p\cdot p' + 2m_e^2\, k\cdot k'\right)$$

leitetaan $m_e \to 0$

Nyt $(p+p')^2 = 4E^2$, $|\bar p| = E$

CM-frame $\bar p' = -\bar p$



$p\cdot k = p'\cdot k' = E^2 - \bar p\cdot\bar k = E^2 - E|k|\cos\theta$

$p\cdot p' = 2E^2$

$p\cdot k' = p'\cdot k = E^2 + E|k|\cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\sum_{\text{spin}}|M|^2 = \frac{8e^2}{16E^4}\left[E^2(E-|k|\cos\theta)^2 + E^2(E+|k|\cos\theta)^2 + 2m_\mu^2E^2\right]$$

$$= e^4\left[\left(1+\frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1-\frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\cos^2\theta\right]$$

Nyt voimme käyttää (4.55), missä

$|v_A - v_B| = 2$ ja $E_A = E_B = \frac{1}{2}E_{cm} = E$, $|\bar p_1| = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}$

Joten

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{64\pi^2 4E^2}\left[1-\frac{m_\mu^2}{E^2}\right]^{1/2}\left[1+\frac{m_\mu^2}{E^2}+\left(1-\frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\cos^2\theta\right] \tag{4.62}$$

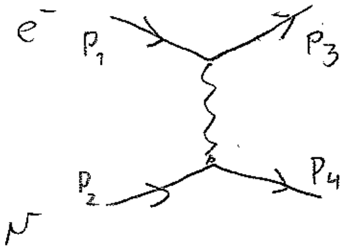
Ja vielä

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\frac{d\sigma}{d\Omega}$$

$$= \frac{e^4}{4\cdot 12\pi E^2}\left[1-\frac{m_\mu^2}{E^2}\right]^{1/2}\left(1+\frac{1}{2}\frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \tag{4.63}$$

huom! jos $E < m_\mu$, menee imaginaariseksi
$\Leftrightarrow$ sironta ei tapahdu, E liian pieni

$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$



$$iM = \frac{ie^2}{(p_1-p_3)^2}\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)\ \bar{u}(p_4)\gamma_\mu u(p_2) \tag{4.64}$$

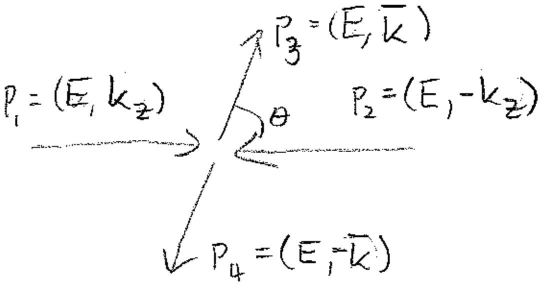
$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spin}}|M|^2 = \frac{e^4}{4(p_1-p_3)^4}\mathrm{tr}\left[\gamma^\mu(\not{p}_1+m_e)\gamma^\nu(\not{p}_3+m_e)\right] \times$$
$$\mathrm{tr}\left[\gamma_\mu(p_2+m_\mu)\gamma_\nu(\not{p}_4+m_\mu)\right] \tag{4.65}$$

sama kuin $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$, paitsi $p_1 \leftrightarrow p$, $p_3 \leftrightarrow -p'$
$p_2 \leftrightarrow -k'$, $p_4 \leftrightarrow k$

asetetaan taas $m_e = 0$ ja vielä $m_\mu = 0$
(hyvin suuren energian raja)

Siis

$$\frac{1}{4}\sum|M|^2 = \frac{8e^4}{(p_1-p_3)^4}\left[p_1\cdot p_4\ p_3\cdot p_2 + p_1\cdot p_2\ p_3\cdot p_4\right] \qquad (4.66)$$



$E = |\bar{k}|$

$\bar{k}\cdot\bar{e}_z = k\cos\theta$

Nyt
$$p_1\cdot p_2 = p_3\cdot p_4 = 2E^2,$$
$$p_1\cdot p_4 = p_3\cdot p_2 = E^2(1+\cos\theta)$$
$$p_1\cdot p_3 = E^2(1-\cos\theta)$$
$$(p_1-p_3)^2 = -2E^2(1-\cos\theta)$$

joten
$$\frac{1}{4}\sum|M|^2 = \frac{2e^2}{(1-\cos\theta)^2}\left(4+(1+\cos\theta)^2\right) \qquad (4.67)$$

Nyt
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{32\pi^2 4E^2}\,\frac{4+(1+\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)^2} \qquad (4.68)$$

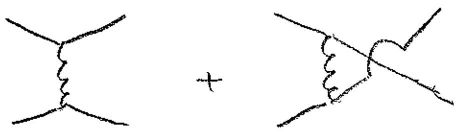
Huomaa ero (4.62) missä $m_\mu \to 0$

$$(4.62) \to \frac{e^4}{64\pi^2 4E^2}(1+\cos^2\theta)$$

(4.68) divergoi $\sim \frac{1}{\theta^4}$ kun $\theta \to 0$. $\sigma_{TOT} = \infty$, tyypillistä Coulombin sironnalle. Kun $\theta \to 0$, vaihdettu fotoni $(p_1-p_3)^2 \to 0$ eli lähestyy massakuorta.

$e^-e^- \to e^-e^-$

Nyt tulevat diagrammat

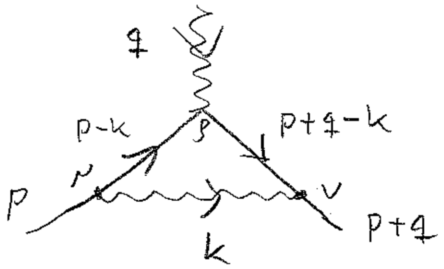


$= i\mathcal{M}$

Sinänsä suoraviivainen lasku, mutta nyt $|\mathcal{M}|^2$ sisältää "ristitulon". Tästä tulee diagrammojen välinen interferenssi.

Verteksikorjaus

- Katsotaan QED:tä vielä kerran lenkkitasolla. Lasketaan <u>verteksi-korjaus</u>



Tämä ei ole sirontadiagramma, sillä kaikki ulk. jalat eivät voi olla massakuorella "on-shell":

$$p^2 = m^2,\ q^2 = 0 \Rightarrow (p+q)^2 = m^2 + 2p\cdot q$$

$\neq 0$, jos $m > 0$

Sovelletaan F:n sääntöjä

$$A = (-ie)^3 \mu^\epsilon \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \gamma_\nu \frac{i}{\not p + \not q - \not k - m} \gamma_\rho \frac{i}{\not p - \not k - m} \gamma_\mu \cdot \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{k^2}$$

mennään jälleen euklidiseen avaruteen:

nyt $\frac{1}{\not p - m} = \frac{\not p + m}{p^2 - m^2} \rightarrow \frac{\not p_E - m}{p_E^2 + m^2}$ missä $\not p_E = p_{E\mu}\gamma_E^\mu$

ja $\{\gamma_E^\mu, \gamma_E^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}$

$$A = -ie^3\mu^\epsilon \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\nu(\not p + \not q - \not k - m)\gamma_\rho(\not p - \not k - m)\gamma^\nu}{((p+q-k)^2+m^2)((p-k)^2+m^2)\ k^2} \qquad (4.69)$$

Nimittäjän Feynman-parametrisointi

$$2\int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta \left[((p+q-k)^2+m^2)\alpha + ((p-k)^2+m^2)\beta + k^2(1-\alpha-\beta)\right]^{-3}$$

Nyt

$$[\,] = k^2 - 2k\cdot[\alpha(p+q)+\beta p] + \alpha(p+q)^2 + \beta p^2 + m^2(\alpha+\beta)$$

jälleen sijoitus

$$\underline{k \Rightarrow k + \alpha(p+q) + \beta p} \quad \Rightarrow \qquad (4.70)$$

$$[\,] = k^2 + m^2(\alpha+\beta) + (\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta)\,p^2 + \alpha(1-\alpha)\,q^2 + 2\alpha(1-\alpha-\beta)\,p\cdot q \equiv \underline{k^2 + Q^2}$$

sijoitus (4.70) pitää tehdä myös osoittajassa

$$y = \gamma_\nu[\not{p}(1-\alpha-\beta) + \not{q}(1-\alpha) - \not{k} - m]\gamma_\rho \times [\not{p}(1-\alpha) - \not{k} - m]\gamma^\nu \qquad (4.71)$$

Etsitään nyt vain divergoiva osa. koska nimittäjä $\sim k^6$, integraali divergoi vain $\sim k^2$-termien osalta. siis $y \to \gamma_\nu \not{k} \gamma_\rho \not{k} \gamma^\nu$

- Nyt siis divergoiva osa

$$-2ie^3\mu^\epsilon \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\, d\alpha\, d\beta\, \frac{1}{[k^2+Q^2]^3}\gamma_\nu \not{k} \gamma_\rho \not{k} \gamma^\nu$$

- $$\gamma_\nu \not{k} \gamma_\rho \not{k} \gamma^\nu = -\gamma_\nu\gamma_\rho \underbrace{\not{k}\not{k}}_{k\cdot k}\gamma^\nu + 2k_\rho \underbrace{\gamma_\nu \not{k} \gamma^\nu}_{(2-d)\not{k}}$$

$$= -2\delta_{\nu\rho}\gamma^\nu k\cdot k + \gamma_\rho\gamma_\nu\gamma^\nu k\cdot k + 2(2-d)k_\rho \not{k}$$

$$= (d-2)k^2\gamma_\rho + 2(2-d)k_\rho \not{k}$$

Nyt d-dimensiossa (eukl.)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}$$

ja $\quad \mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\gamma_\nu = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \delta_{\mu\nu}\cdot \mathrm{Tr}\,\mathbb{I} = 4\,\delta_{\mu\nu}$

samoin $\quad \not{k}\not{k} = \frac{1}{2}k_\mu k_\nu\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = k\cdot k$

mutta $\quad \underline{\gamma_\mu \not{k}\gamma^\mu} = -\gamma_\mu\gamma^\mu\not{k} + \gamma_\mu\{\underbrace{\not{k}, \gamma^\mu}_{2k^\mu}\} = -\delta_\mu{}^\mu \not{k} + 2\not{k}$

$$= \underline{(2-d)\not{k}} \tag{4.72}$$

Nyt termissä $k_\rho \not{k}$ integraali antaa ainoastaan tyyppiä $k_\rho k^\rho$ -kontribuutioita. Koska integraali on muoten symmetrinen, $k_\rho\not{k} \to \frac{1}{4}k^2\gamma_\rho$

Nyt $\quad \gamma_\nu\not{k}\gamma_\rho\not{k}\gamma^\nu \to -\frac{1}{2}(2-d)\,k^2\gamma_\rho$

ja $\quad A = -2ie^3(2-d)\,\gamma_\rho \int d\alpha\, d\beta \left[\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right]^{\epsilon/2}$

$$\times \frac{d}{2\cdot 16\pi^2}\,\frac{\Gamma(\epsilon/2)}{\Gamma(3)}$$

Nyt $\quad \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta\,[\;]^{\epsilon/2} = \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-\alpha} d\beta \left[1 + \frac{\epsilon}{2}\ln\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}\int_0^1\int_0^{1-\alpha} d\alpha\, d\beta\, \ln\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}$$

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon)$$

Divergentti osa on siis

$$-\gamma_\rho \frac{-ie^3}{2\cdot 16\pi^2}\left[(2-\epsilon)\frac{1}{2}(4-\epsilon)\left(\frac{2}{\epsilon}-\gamma_E\right)\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}\int\!\!\int \cdots\right]\right.$$

$$= \frac{-ie^3}{16\pi^2}\frac{2}{\epsilon}\gamma_\rho .$$

Tällä on sama rakenne kuin "paljaalla" verteksillä $-ie\gamma_\rho$. Siis divergentti multiplikatiivinen korjaus on $\frac{e^2}{16\pi^2}\frac{2}{\epsilon}$.