Statistinen fysiikka Loppukoe 13.12.2006
English version: turn over!

1. Osoita seuraavat tulokset ideaaliselle Maxwell-Boltzmann -kaasulle:
$$\begin{aligned}(\Delta n_\ell)^2 &\equiv \langle (n_\ell - \bar{n}_\ell)^2\rangle = \bar{n}_\ell(1+\bar{n}_\ell)\\ (\Delta N)^2 &\equiv \langle (N-\bar{N})^2\rangle = \sum_\ell \bar{n}_\ell(1+\bar{n}_\ell),\end{aligned}$$
sekä ideaaliselle Fermi-Dirac kaasulle:
$$(\Delta n_\ell)^2 = \bar{n}_\ell(1-\bar{n}_\ell), \qquad (\Delta N)^2 = \sum_\ell \bar{n}_\ell(1-\bar{n}_\ell)$$
Tässä $\bar{N} = \sum_\ell \bar{n}_\ell$ on hiukkasten kokonaislukumäärä.

2. Termodynaamiset responssit voidaan laskea termodynaamisten potentiaalien toisen kertaluvun derivaattoina. Näytä että lämpökapasiteetit $C_V \equiv T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N}$ ja $C_p \equiv T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p,N}$ voidaan kirjoittaa muotoon
$$C_V = -T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_{V,N}, \qquad C_p = -T\left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2}\right)_{p,N}.$$
Näytä myös että kokoonpuristuvuudet $\kappa_T \equiv -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,N}$ ja $\kappa_S \equiv -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{S,N}$ voidaan kirjoittaa
$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\right)_{T,N}, \qquad \kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\right)_{S,N}.$$
Miksi etumerkki toisen kertaluvun derivaatan edessä on negatiivinen?

3. Näytä että ultrarelativistisen Fermi-Dirac -kaasun ($k_F \gg k_c = mc/\hbar$) paineen ekspansio nollalämpötilassa $T = 0$ on
$$p = \frac{\hbar c}{12\pi^2}(k_F^4 - k_c^2 k_F^2 + \ldots).$$

4. Laske C_V:n johtava kontribuutio ideaaliselle Fermi-Dirac -kaasulle matalan lämpötilan rajalla ($T \ll T_F$). Vihje: 1 kertaluvun Sommerfeldin ekspansio on
$$\int_0^\infty d\epsilon\,\frac{\phi(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1} \approx \int_0^\mu d\epsilon\,\phi(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2\phi'(\mu) + \ldots$$

5. Ideaalisen Bose-Einstein -kaasun suuri potentiaali on
$$\Omega = k_BT\ln(1-z) - \frac{Vk_BT}{\lambda_T^3}g_{5/2}(z), \qquad g_x(z) \equiv \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^x}.$$
Tässä $\lambda_T^2 = 2\pi\hbar^2/(mk_BT)$ ja z on fugasiteetti. Kirjoita Clausius-Clapeyron -yhtälö kondensaatiotransitiolle ja näytä että kondensaatiolämpö hiukkasta kohti on
$$\Delta h = \frac{5}{2}\frac{\zeta(\frac{5}{2})}{\zeta(\frac{3}{2})}k_BT, \qquad \zeta(x) = g_x(1)$$