

HUOM: TENTTI 13.12. 14 – 18 salissa TE320.

1. Isingin malli *keskimääräisen kentän approksimaatiolla*: Isingin mallin partitiofunktio on

$$Z = \sum_{\{s_i\}} e^{\beta J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j + \beta h \sum_i s_i},$$

missä $s_i = \pm 1$. Eräs tapa formuloida keskimääräisen kentän approksimaatio on olettaa että voimme korvata kaikki spinin s_i naapurit keskimääräisellä spinillä $r \equiv \langle s \rangle$ yo. partitiofunktiossa. Näytä että tässä approksimaatiossa saamme seuraavan ehdon r :lle:

$$r = \tanh[\beta(Jzr + h)],$$

missä z on systeemin koordinaatioluku (yhden spinin lähinaapurien lukumäärä).

Näytä että jos $h = 0$, kriittinen lämpötila tässä approksimaatiossa on $T_c = Jz/k_B$. Näytä myös että kriittinen eksponentti β , määriteltynä yhtälöstä

$$\langle r \rangle \propto (T_c - T)^\beta$$

kun $T \lesssim T_c$, on $\beta = 1/2$.

Ylläoleva approksimaatio antaa kriittisen lämpötilan myös 1-ulotteiselle Isingin mallille, kun eksaktilla ratkaisulla ei sitä ollut. Voitko perustella miksi?

2. *Landaun faasimuutosteoria* on efektiivinen malli missä käytetään vain keskimääräistä järjestysparametria. Esimerkiksi, homogeenisessa ja isotrooppisessa magneettisessa systeemissä Helmholtzin vapaa energia voidaan approksimoida kaavalla

$$F(T, m) = F_0(T) + \alpha(T - T_c)m^2 + \lambda m^4 + O(m^6),$$

missä $F_0(T)$ on T :n säännöllinen funktio. Tässä $\vec{m} = \langle \vec{M} \rangle / V$, keskimääräinen magneetituma. Emme ota huomioon $O(m^6)$ -termejä. Gibbsin vapaa energia ulkoisessa kentässä tulee olemaan

$$G(T, H) = F(T, m) - \mu_0 V \vec{m} \cdot \vec{H}.$$

- a) Laske $m^2(T)$ kun $\vec{H} = 0$. Mikä on faasitransition kertaluku?
 b) Laske lämpökapasiteetti

$$C_H = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_H = -T \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_H$$

kun $H = 0$ tapauksissa $T < T_c$ ja $T > T_c$.

- c) Laske susceptibiliteetti

$$\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_T$$

kun $H = 0$. (vihje: ratkaise $m(H, T)$ pienen H :n rajalla.) Miten χ käyttäytyy T_c :n ympäristössä?

- d) Mitä ovat kriittiset eksponentit β , γ , δ ? (vihje: sinun pitäisi saada keskimääräisen kentän teorian tulokset.)