Statistinen fysiikka Kotitehtävä 5 12.10.2006

1. Määrää Hamiltonin virtauksen trajektorit 2-ulotteisessa faasiavaruudessa (q, p) hiukkaselle vakiopainovoimakentässä

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgq.$$

Tutki, miten faasiavaruuden alue, joka hetkellä $t = 0$ on kolmio, kärkipisteet $(q_0, p_0), (q_0+a, p_0), (q_0, p_0+b)$, liikkuu ajan mukana ja osoita, että sen pinta-ala säilyy.

2. Leipurin muunnos (“kaulitaan ja käänetään”) on yksinkertainen esimerkki sekoittavasta virtauksesta. Se kuvaa 2-ulotteisen yksikköneliön $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ itselleen:

$$(x, y) \to (x', y') = U(x, y) = \begin{cases} (2x, y/2) & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ (2x - 1, (y + 1)/2) & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

a) Mikä on käänteismuunnos? Näytä että U säilyttää pinta-alan (vihje: tutki U:n Jacobin determinanttia). Nyt voimme ajatella että

$$(x, y) \to U(x, y) \to U^2(x, y) \to \dots$$

kuvaa faasiavaruuden virtaa diskreetissä ajassa.

b) Mielivaltaiset x ja y voidaan kuvata binäärilukuina muodossa

$$x = \sum_{n=-\infty}^{0} a_n 2^{n-1}, \qquad y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n},$$

missä $a_n = 0$ tai 1. Näytä että leipurin muunnos on ekvivalentti ns. Bernoullin siirron $a'_n = a_{n-1}$ kanssa.

c) Hahmottele miten alue $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \frac{1}{2}$ muuntuu muutamissa perättäisissä muunnoksissa. Entäpä pieni neliö jonka koko on ϵ^2?
Jos ϵ^2-kokoisen neliön keskipiste on kohdassa $x = \frac{1}{2}$, näytä että $n \gtrsim -ln\epsilon / \ln 2$ muunnoksen jälkeen neliö on jakaantunut koko faasiavaruuteen niin että osia siitä löytyy mielivaltaisen ϵ^2-kokoisen neliön sisältä. Kuinka monta muunnosta tarvitaan jos alkuperäinen neliö on faasiavaruuden reunalla $x = 0$? (deterministinen irreversiibelisyys)

3. Mitä voit sanoa systeemistä millä on seuraavanlainen tilatiheyden logaritmi energian funktiona?