1. Olkoon meillä gaussinen todenäköisyysjakautuma

$$f(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x^T gx}$$

   $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)^T$, ja g on $N \times N$ symmetrinen matriisi.

   a) Näytä että $C = (2\pi)^{-n/2}\sqrt{\det g}$ (vihje: diagonalisoi g).

   b) Näytä että

$$\langle x_p \cdots x_r \rangle = \left[\frac{\partial}{\partial h_p} \cdots \frac{\partial}{\partial h_r} F(h) \right]_{h=0}, \qquad F(h) = e^{\frac{1}{2}h^T g^{-1} h}.$$

   c) Näytä että $\langle x_i x_j \rangle = (g^{-1})_{ij}$ ja $\langle x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \rangle = 0$ jos k pariton.

2. Kanonisen ensemblen tiheysoperaattori on $\rho = exp[-\beta(F - H)]$. Näytä että

$$\langle H \rangle = \frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta} \quad \text{and} \quad \langle (H - \langle H \rangle)^3 \rangle = \frac{\partial^3(\beta F)}{\partial \beta^3}.$$

3. Olkoon spin-$\frac{1}{2}$ hiukkasen spinin z-komponentin σ_z ominaistilat $|+\rangle$ and $|-\rangle$.

   a) Koejärjestelyssä on mitattu että tilojen $|\pm\rangle$ todennäköisyydet ovat $p_+ = \langle +|\rho|+\rangle$ ja $p_- = \langle -|\rho|-\rangle = 1 - p_+$. Osoita että entropian maksimoi näillä rajoituksilla sellainen tiheysoperaattori ρ, jonka ei-diagonaalielementit ovat nollia: $\langle +|\rho|-\rangle = \langle -|\rho|+\rangle = 0$. Mikä on maksimientropia?

   b) Oletetaan että hetkellä $t = 0$

$$\rho = \begin{bmatrix} p_+ & 0 \\ 0 & p_- \end{bmatrix}.$$

   Hiukkanen asetetaan x-akselin suuntaiseen magneettikenttään, jolloin Hamiltonin operaattori on $H = -h\sigma_x$. Määrää $\rho(t)$ ja todennäköisyys sille että spintila on $|+\rangle$. Laske myös $\langle \sigma_z \rangle$ ja $(\Delta\sigma_z)^2 = \langle \sigma_z^2 \rangle - \langle \sigma_z \rangle^2$ ajan funktioina. (σ_i ovat 2×2 Pauli matriiseja.)