1. Näytä että ideaaliselle Fermi-kaasulle pätee $pV = \frac{2}{3}E$.

2. a) Osoita ideaaliselle Bose-Einstein -kaasulle:

$$\begin{aligned}(\Delta n_\ell)^2 &\equiv \langle (n_\ell - \bar{n}_\ell)^2 \rangle = \bar{n}_\ell (1 + \bar{n}_\ell) \\ (\Delta N)^2 &\equiv \langle (N - \bar{N})^2 \rangle = \bar{N} + \sum_\ell \bar{n}_\ell^2\end{aligned}$$

missä $\bar{N} = \sum_\ell \bar{n}_\ell$ on hiukkasten kokonaislukumäärä.

b) Näytä ideaaliselle Fermi-Dirac -kaasulle

$$\begin{aligned}(\Delta n_\ell)^2 &= \bar{n}_\ell (1 - \bar{n}_\ell) \\ (\Delta N)^2 &= \sum_\ell \bar{n}_\ell (1 - \bar{n}_\ell).\end{aligned}$$

3. Määritellään funktio

$$g_x(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^x}$$

(tästä saadaan Riemannin zeta-funktio erikoistapauksena $g_x(1) = \zeta(x)$). Osoita että g:n integraaliesitys on

$$g_x(z) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^\infty dy \frac{y^{x-1}}{z^{-1} e^y - 1}.$$

Osoita että ideaaliselle Bose-Einstein -kaasulle pätee

$$\Omega(T, V, \mu) = k_B T \ln(1 - z) - \frac{V k_B T}{\lambda_T^3} g_{5/2}(z)$$

ja

$$N(T, V, \mu) = \frac{z}{1 - z} + \frac{V}{\lambda_T^3} g_{3/2}(z),$$

missä $z = e^{\beta\mu}$ ja λ_T on terminen deBroglien aallonpituus.