Kompleksiluvut ja -funktiot 2
1. Johdanto 2
1° Luonnolliset luvut $\mathcal{N}$ 2
2° Kokonaisluvut $\mathcal{Z}$ 2
3° Rationaaliluvut $\mathcal{Q}$ 2
4° Reaaliluvut $\mathcal{R}$ 2
2. Kompleksilukujen esitys 2
1° Graafinen esitys: Kompleksitaso 2
2° Esitys imaginääriyksikön i avulla 3
3° Napakoordinaattiesitys 3
4° Kompleksiluvun juuret 4
5° Polynomin nollakohdat 4
6° Kompleksilukujen vektoriesitys 4
3. Kompleksifunktiot 5
1° Muunnokset 5
2° Kiertopiste, leikkaus ja Riemannin pinta 6
3° Alkeisfunktioita 7
4. Kompleksinen derivointi 8
1° Cauchyn-Riemannin yhtälöt 9
2° Harmoniset funktiot 10
3° Ortogonaaliset käyrästöt 10
4° Koordinaatistomuunnos ja käyräviivainen koordinaatisto 11
5° Singulariteetit 11

Vektorilaskentaa 12
1. Johdanto 12
2. Vektoritulot 13
1° Piste- eli skalaaritulo 13
2° Risti- eli vektoritulo 14
3° Skalaarikolmitulo 14
4° Vektorikolmitulo 14
5° Levi-Civitan permutaatiosymboli 14
3. Differentiaalilaskentaa 15
1° "Tavallinen"derivaatta 15
2° Skalaarikentän suunnattu derivaatta 15
3° Nabla-operaattori 15
4° Skalaarifunktion gradientti 15
5° Skalaarifunktion differentiaali 16
6° Vektorifunktion divergenssi 16
7° Vektorifunktion roottori 16
8° Laplacen operaattori 16
9° Laskukaavoja 16
10° Lähteettömät ja pyörteettömät kentät 16
4. Avaruuskäyrät 18

Vektori-integrointi 21
1. Vektorifunktion integrointi parametrin suhteen 21
2. Viivaintegraalit 21
3. Pintaintegraalit 23
1° Skalaarifunktion integrointi pinnan yli 23
2° Pintaintegraalit 24
4. Tilavuusintegraalit 25
5. Gaussin lause 26
6. Stokesin lause 28
7. Greenin lauseet 30

Matriisilaskentaa 31
1. Matriisin käsite ja nimityksiä 31
2. Matriisien laskusäännöt 31
1° Yhteen- ja vähennyslasku 31
2° Kertominen vakiolla 31
3° Matriisien kertolasku 31
4° Laskulait 32
5° Matriisin determinantti 32
6° Matriisin jälki (trace) 33
3. Matriisimuunnoksia 33
1° Matriisitulojen muunnoksia 34
2° Matriisityyppejä 34
4. Matriisikuvaukset 34
5. Matriisin diagonalisointi, ominaisarvot ja ominaisvektorit 35
1° Hermiittisen ja unitaarisen matriisin ominaisarvot ja ominaisvektorit 38
2° Lineaariset kuvaukset 39

Käyräviivaiset koordinaatistot 40
1. Yksikkövektorit käyräviivaisissa koordinaatistoissa 40
2. Ortogonaaliset koordinaatistot 40
3. Kaaren pituus ja tilavuuselementti 41
4. Gradientti, divergenssi ja roottori 41
1° Sylinteri- ja pallokoordinaatistot 43
5. Kontra- ja kovariantit komponentit 43

Tensorilaskentaa 45
1. Karteesiset tensorit 45
2. Ei-karteesiset tensorit 47
1° Kovariantit ja kontravariantit vektorit 47
2° Vektorikomponenttien muunnosominaisuudet 47
3. Käyräviivaiset koordinaatistot; yleiset tensorit 48
1° Kantavektorit, viivaelementti ja metrinen perustensori 48
2° Indeksin nosto 49
3° Indeksin lasku 50
4° 2. kertaluvun tensori: indeksien nosto ja lasku 50
4. Koordinaatiston transformaatio 50
5. Vektorien väliset tulot 52
1° Skalaaritulo (sisätulo) 52
2° Dyaditulo (ulkotulo) 52
3° Kolmiulotteisten vektorien ristitulo 52
6. Sovellutuksia 52
1° Pintaelementti ja pinta-ala 52
2° Tilavuusalkio 53
3° Geodesiaa 53

Kompleksiluvut ja -funktiot

1. Johdanto

1° **Luonnolliset luvut** $\mathcal{N}: 1, 2, 3, \ldots$
Luonnollisille luvuille on määritelty

- yhteenlasku: $a + b \in \mathcal{N}$, kun $a, b \in \mathcal{N}$.
- kertolasku: $a \cdot b \in \mathcal{N}$, kun $a, b \in \mathcal{N}$.

Kysymys:

$$\exists x \in \mathcal{N} \text{ siten, että } a + x = c, \text{ kun } a, c \in \mathcal{N}?$$

Vastaus: ei aina (esim. $a = 5, c = 2$).
$\Rightarrow$ Laajennetaan lukualuetta; lisätään 0 ja negatiiviset luvut.

2° **Kokonaisluvut** $\mathcal{Z}: \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
Kokonaisluvuille on määritelty

- yhteenlasku: $a + b \in \mathcal{Z}$, kun $a, b \in \mathcal{Z}$.
- vähennyslasku: $a - b = a + (-b) \in \mathcal{Z}$, kun $a, b \in \mathcal{Z}$.
- kertolasku: $a \cdot b \in \mathcal{Z}$, kun $a, b \in \mathcal{Z}$.

Vähennyslasku $c - a$ vastaa kysymykseen: paljonko on x, jos $a + x = c$?
Kysymys:

$$\exists x \in \mathcal{Z} \text{ siten, että } a \cdot x = c, \text{ kun } a, c \in \mathcal{Z}?$$

Vastaus: ei aina (esim. a=3, c=2).
$\Rightarrow$ Laajennetaan lukualuetta; lisätään murtoluvut.

3° **Rationaaliluvut** $\mathcal{Q}: \frac{a}{b}; a, b \in \mathcal{Z}, b \neq 0$
Rationaaliluvuille on määritelty

- yhteenlasku:$a + b \in \mathcal{Q}$, kun $a, b \in \mathcal{Q}$.
- vähennyslasku: $a - b = a + (-b) \in \mathcal{Q}$, kun $a, b \in \mathcal{Q}$.
- kertolasku: $a \cdot b \in \mathcal{Q}$, kun $a, b \in \mathcal{Q}$.
- jakolasku: $\frac{a}{b} \in \mathcal{Q}$, kun $a, b \in \mathcal{Q}$ ja $b \neq 0$.

Jakolasku $\frac{c}{a}$ vastaa kysymykseen: paljonko on x, jos $a \cdot x = c$?
Kysymys:

$$\exists x \in \mathcal{Q} \text{ siten, että } x \cdot x = c, \text{ kun } c \in \mathcal{Q}, c > 0?$$

Vastaus: ei aina (esim. $c = 2$).
$\Rightarrow$ Laajennetaan lukualuetta: lisätään irrationaaliluvut.

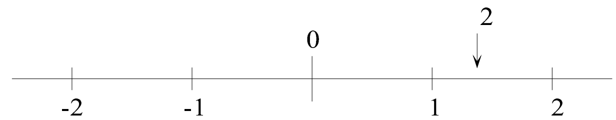
4° **Reaaliluvut** $\mathcal{R}$
Reaaliluvuille on määritelty

- yhteen- ja vähennyslasku: $a \pm b \in \mathcal{R}$, kun $a, b \in \mathcal{R}$.
- kertolasku: $a \cdot b \in \mathcal{R}$, kun $a, b \in \mathcal{R}$.
- jakolasku: $\frac{a}{b} \in \mathcal{R}$, kun $a, b \in \mathcal{R}$.

Reaalilukujen desimaaliesitys:

- jaksollinen: rationaaliluku.
- jaksoton: irrationaaliluku.

Lukusuora: Jokaista reaalilukua vastaa suoran piste ja kääntäen: jokaista suoran pistettä vastaa reaaliluku.



Kuva 1.1: Suoran pisteet vastaavat reaalilukuja.

Kysymys:

$$\exists x \in \mathcal{R} \text{ siten, että } x \cdot x = c, \text{ kun } c \in \mathcal{R}?$$

Vastaus: ei aina (esim. $c = -2$).
$\Rightarrow$ Laajennetaan lukualuetta; lisätään imaginääriluvut
$\Rightarrow$ Kompleksiluvut $\mathcal{C}$.

2. Kompleksilukujen esitys

Määritelmä: Kompleksiluku $z \in \mathcal{C}$ on järjestetty reaalilukupari $(a, b); a, b \in \mathcal{R}$.
Ominaisuuksia $(a, b, c, d, m \in \mathcal{R})$:

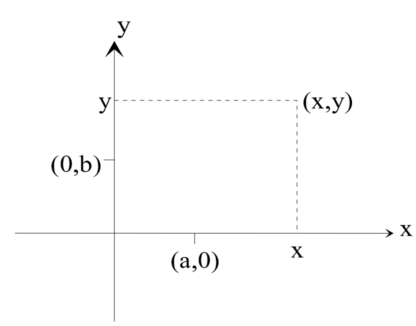
(i) $(a, b) = (c, d)$ jos ja vain jos (joss, $\Leftrightarrow$) $a = c$ ja $b = d$.

(ii) yhteen- ja vähennyslasku:
$(a, b) \pm (c, d) = (a \pm c, b \pm d)$.

(iii) kertolasku: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ ja
$m(a, b) = (ma, mb)$.

Yhteen- ja kertolaskut ovat kommutatiivisia, t.s. esim. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

1° **Graafinen esitys: Kompleksitaso**
Jokaista (kompleksi)tason pistettä (x, y) vastaa kompleksiluku ja kääntäen.



Kuva 1.2: Kompleksitaso

Reaaliluku: $(a, 0), \; a \in \mathcal{R}$.
Imaginääriluku: $(0, b), \; b \in \mathcal{R}$.
Kompleksiluku:

$$z = (a, b) \overset{(ii)}{=} (a, 0) + (0, b) \overset{(iii)}{=} a(1, 0) + b(0, 1).$$

Esim. $x^2 = -1, \; x = (a, b), \; -1 = (-1, 0)$

$$\begin{aligned} x \cdot x &\overset{(iii)}{=} (a^2 - b^2, ab + ba) = (a^2 - b^2, 2ab) \\ &= (-1, 0) \\ &\overset{(i)}{\Rightarrow} \begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ 2ab = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow x = (0, 1). \end{aligned}$$

2° **Esitys imaginääriyksikön i avulla**
Merkitään

$$\begin{aligned} (1,0) &= 1 \quad \text{reaaliyksikkö} \\ (0,1) &= i \quad \text{imaginääriyksikkö} \end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} z &= (a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a + bi \\ &= a + ib. \end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &= (1,0) \cdot (1,0) = (1-0, 0+0) = (1,0) \\ &= 1 \in \mathcal{R} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} i \cdot i &= (0,1) \cdot (0,1) = (0-1, 0+0) = (-1,0) \\ &= -1 \in \mathcal{R}. \end{aligned}$$

Peruslaskutoimitukset
Yhteen- ja vähennyslasku:

$$(a+ib) \pm (c+id) = (a \pm c) + i(b \pm d).$$

Kertolasku:

$$(a+ib) \cdot (c+id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Jakolasku:

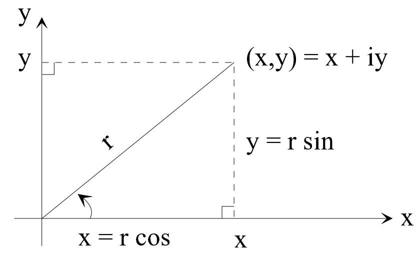
$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id}\,\frac{c-id}{c-id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Nimityksiä
Olkoon $z = (a,b) = a + ib;\ a, b \in \mathcal{R}$. Nyt

- a on reaaliosa; merkintä $a = \mathrm{Re}z$.
- b on imaginääriosa; merkintä $b = \mathrm{Im}z$.
- i on imaginääriyksikkö.
- Jos $b = 0$, niin z on puhtaasti reaalinen.
- Jos $a = 0$ ja $b \neq 0$, niin z on puhtaasti imaginäärinen.
- $z^* = a - ib$ on z:n liittoluku eli kompleksikonjugaattiluku. (Usein käytetään myös merkintää $\bar{z} = z^*$.)
- $|z| \equiv \sqrt{z^* z} = \sqrt{a^2 + b^2}$ on z:n itseisarvo. (Usein käytetään myös merkintää $\mathrm{mod}z = |z|$.)

3° **Napakoordinaattiesitys**
Koordinaattiakselien nimitykset:

- x-akseli: reaali(luku)akseli.
- y-akseli: imaginääriakseli.



Kuva 1.3: Napakoordinaattiesitys.

Jokaista kompleksilukua vastaa kompleksitason piste, jonka sijainti ilmoitetaan kahdella koordinaatilla:

- (x, y): suorakulmainen eli karteesinen koordinaatisto.
- (r, ϕ): napakoordinaatisto.

Kompleksiluku z voidaan siis kirjoittaa

$$z = (x,y) = x + iy = r\cos\phi + ir\sin\phi.$$

Käyttäen *Eulerin kaavaa*

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

voidaan napakoordinaattiesitys kirjoittaa muotoon

$$z = x + iy = r(\cos\phi + i\sin\phi) = re^{i\phi}$$

eli

$$\begin{aligned} z &= re^{i\phi} \\ z^* &= re^{-i\phi}. \end{aligned}$$

Tässä

- r on z:n itseisarvo $|z| = \mathrm{mod}z$.
- ϕ on z:n *vaihekulma* eli z:n *argumentti* $= \arg z$.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \arctan\frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Napakoordinaattiesityksessä on usein helpompi suorittaa laskutoimituksia.
Esim. Olkoon

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 e^{i\phi_1} \\ z_2 = x_2 + iy_2 = r_2 e^{i\phi_2}. \end{cases}$$

Nyt

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)} \\ &= r_1 r_2 [\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)] \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2)]. \end{aligned}$$

Jos $z = re^{i\phi}$, niin

$$\begin{aligned} z^n &= r^n \left(e^{i\phi}\right)^n = r^n e^{in\phi} \\ &= r^n [\cos n\phi + i \sin n\phi]. \end{aligned}$$

Tästä erikoistapauksena saamme *De Moivren* teoreeman:

$$[\cos\phi + i\sin\phi]^n = e^{in\phi} = \cos n\phi + i\sin n\phi.$$

Esim. Olkoon $z_1 = (0,1) = i = re^{i\phi}$.
Nyt $r = 1$ ja $\phi = \pi/2$, joten

$$i^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = e^{i\pi} = -1.$$

Esim. Yhtälö $|z| = 1$ on yksikköympyrän yhtälö, sillä

$$\begin{aligned} |z| &= (z^*z)^{\frac{1}{2}} = \left[re^{-i\phi}re^{i\phi}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(r^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{x^2+y^2}, \end{aligned}$$

t.s.

$$|z| = 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = 1.$$

Huom. Napakoordinaattiesitys on jaksollinen vaihekulmassa:

$$z = re^{i\phi} = re^{i(\phi+2\pi)} = re^{i(\phi+k2\pi)},\ k \in \mathcal{Z}.$$

Jos argumentti ϕ on rajoitettu välille $0 \le \phi < 2\pi$, sanotaan että kyseessä on *pääarvo* eli *päähaara*.

4° Kompleksiluvun juuret

Luku ω on z:n n:s juuri, jos

$$\omega^n = z.$$

Kirjoitetaan z napakoordinaattiesityksessä:

$$z = re^{i(\phi+k2\pi)};\ 0 \le \phi < 2\pi \text{ ja } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Nyt

$$\begin{aligned} \omega &= z^{1/n} = \left[re^{i(\phi+k2\pi)}\right]^{1/n} \\ &= r^{1/n}e^{i(\phi/n + k\cdot 2\pi/n)} = Re^{i\Phi_k}, \end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned} R &= r^{1/n} \\ \Phi_k &= \frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned}$$

Kun rajoitutaan ω:n päähaaraan, t.s. vaaditaan että

$$0 \le \Phi_k < 2\pi,$$

nähdään, että

$$\Phi_k = \frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Jokaista k:n arvoa $0, 1, 2, \ldots, n-1$ vastaa eri ω:n arvo.
Luvun n:nellä juurella on siis n eri arvoa.
Esim. Olkoon $z = -1 + i$. Mitä on $\sqrt[3]{z}$? Kirjoitetaan z napakoordinaateissa:

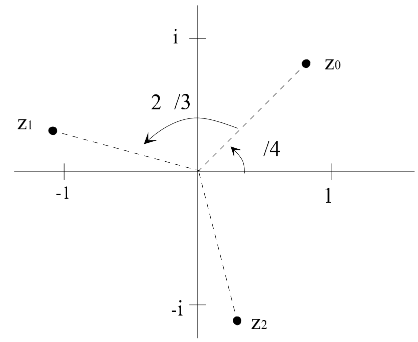
$$z = -1 + i = re^{i\phi} = \sqrt{2}e^{i(3\pi/4 + k2\pi)}.$$

Nyt

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{z} &= z^{1/3} = 2^{1/6}e^{i(3\pi/4+k2\pi)/3} \\ &= 2^{1/6}e^{i(\pi/4 + k\cdot 2\pi/3)}, \end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned} k = 0: &\quad z_0 = 2^{1/6}e^{i\pi/4} \\ k = 1: &\quad z_1 = 2^{1/6}e^{i(\pi/4+2\pi/3)} \\ k = 2: &\quad z_2 = 2^{1/6}e^{i(\pi/4+4\pi/3)} \\ (k = 3: &\quad z_3 = 2^{1/6}e^{i(\pi/4+2\pi)} = z_0). \end{aligned}$$



Kuva 1.4: Luvun $-1+i$ kuutiojuuret.

Esim.$z^n = 1$ eli

$$1 = e^{ik2\pi},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Siis 1:n n:s juuri on

$$\omega_n = e^{ik\cdot 2\pi/n},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 (n \text{ kpl}).$$

Esim. $\sqrt[3]{1} = e^{i(k/3)\cdot 2\pi}$, josta

$$\begin{cases} \omega_0 = 1 \\ \omega_1 = -1/2 + i\cdot\sqrt{3}/2 \\ \omega_2 = -1/2 - i\cdot\sqrt{3}/2 \end{cases}$$

Tarkistetaan esimerkkinä ω_2:

$$\omega_2^3 = -\frac{1}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}i + \frac{9}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i = 1.$$

5° Polynomin nollakohdat

Usein joudutaan etsimään n:n asteen polynomin

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

nollakohtaa, t.s. ratkaisemaan $P_n(z) = 0$. *Algebran peruslauseen* mukaan

$$\exists z_1 \in \mathcal{C} \text{ siten, että } P_n(z_1) = 0.$$

Edelleen voidaan osoittaa, että jos $P_n(z_1) = 0$, niin $z - z_1$ jakaa polynomin $P_n(z_1)$, t.s. on olemassa $(n-1)$:n asteen polynomi $Q_{n-1}(z)$ siten, että

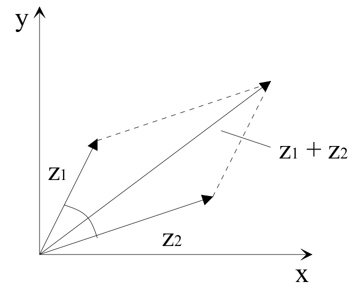
$$P_n(z) = (z - z_1)Q_{n-1}(z).$$

Sovelletaan polynomiin $Q_{n-1}(z)$ uudelleen algebran peruslausetta, j.n.e. Lopputulokseksi saadaan että n:n asteen polynomilla on täsmälleen n nollakohtaa, juurta (joista jotkut voivat olla keskenään yhtäsuuria). Jos $P_n(z)$:n juuret ovat $z_1, z_2, \ldots, z_n$, niin

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n).$$

6° Kompleksilukujen vektoriesitys

Kompleksilukua $z = x + iy$ vastaa (x, y)-tason vektori, jonka alkupiste on origossa ja päätepiste pisteessä (x, y). Tällaista vektoria sanotaan *paikkavektoriksi*. Kompleksilukujen yhteenlaskua vastaa vektorien yhteenlasku.



Kuva 1.5: Kompleksilukujen yhteenlasku vektoriesityksessä.

Kääntäen: kahden vektorin $\bar{z}_1$ ja $\bar{z}_2$ *pistetulo*

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = |z_1||z_2| \cos\theta,$$

kun θ on vektorien välinen kulma, vastaa *skalaaritulon* $z_1^* z_2$ reaaliosaa, sillä

$$\begin{aligned} z_1^* z_2 &= r_1 e^{-i\phi_1} r_2 e^{i\phi_2} = r_1 r_2 e^{i(\phi_2-\phi_1)} \\ &= r_1 r_2 e^{i\theta} = r_1 r_2 [\cos\theta + i\sin\theta]. \end{aligned}$$

Tästä nähdään, että

$$\mathrm{Re}\{z_1^* z_2\} = r_1 r_2 \cos\theta = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

Toisaalta *ristitulon* eli *vektoritulon* itseisarvo

$$|\bar{z}_1 \times \bar{z}_2| = r_1 r_2 |\sin\theta|$$

vastaa skalaaritulon $z_1^* z_2$ imaginääriosan itseisarvoa:

$$|\bar{z}_1 \times \bar{z}_2| = |\mathrm{Im}\{z_1^* z_2\}|$$

joten

$$z_1^* z_2 = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 + i|\bar{z}_1 \times \bar{z}_2|.$$

3. Kompleksifunktiot

Tarkastellaan funktiota $f(z)$, joka kuvaa kompleksiluvun z kompleksiluvuksi w, t.s.

$$w = f(z).$$

- $f(z)$ on *yksiarvoinen* z:n funktio, joss jokainen z kuvautuu täsmälleen yhdeksi luvuksi w.
- $f(z)$ on *moniarvoinen* z:n funktio, joss z:n arvot kuvautuvat useammaksi kuin yhdeksi luvuksi w.

Esim. Funktio $w = f(z) = z^2$ on yksiarvoinen.
Esim. Funktio $w = f(z) = z^{1/2}$ on moniarvoinen (kaksiarvoinen). Esim. piste $z = 1$ kuvautuu pisteiksi $w = 1$ ja $w = -1$.
Ellei toisin mainita, tarkoitamme jatkossa *funktiolla yksiarvoista funktiota.*

1° Muunnokset

Olkoon $w = f(z)$ yksiarvoinen funktio. Kirjoitetaan

$$w = u + iv;\ u, v \in \mathcal{R}$$

ja

$$z = x + iy;\ x, y \in \mathcal{R}.$$

Nyt

$$w = u + iv = f(z) = f(x + iy),$$

t.s.

$$u = u(x, y) \text{ ja } v = v(x, y).$$

Tämä voidaan tulkita siten, että kompleksitason, z-tason, piste (x, y) kuvautuu toisen kompleksitason, w-tason, pisteeksi (u, v).
Esim. $w = z^2$ on yksiarvoinen funktio. Nyt

$$w = u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

joten

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 \\ v &= 2xy. \end{aligned}$$

a) Piste $P(-2, 1)$ z-tasossa kuvautuu w-tason pisteeksi P':

$$\begin{aligned} u &= (-2)^2 - 1^2 = 3 \\ v &= 2(-2)1 = -4. \end{aligned}$$

Siis kompleksiluku $-2 + i$ kuvautuu kompleksiluvuksi $3 - 4i$ kuvauksessa $w = z^2$. Samassa muunnoksessa piste $Q(1, -2)$ kuvautuu pisteeksi $Q'(-3, -4)$.
b) Suoran PQ yhtälö on

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t \qquad \text{eli} \quad \frac{x - 1}{-2 - 1} = \frac{y + 2}{1 + 2} = t,$$

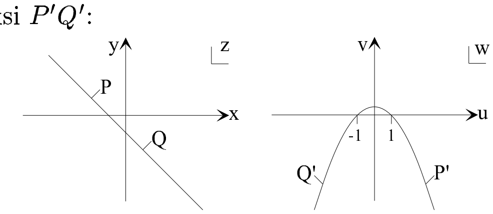
missä parametri t voi saada kaikki mahdolliset reaaliarvot. Parametrin t avulla suoran PQ yhtälö on

$$\begin{aligned} x &= -3t + 1 \\ y &= 3t - 2, \end{aligned}$$

eli z-tasossa suora voidaan esittää muodossa

$$z = -3t + 1 + i(3t - 2);\ -\infty < t < \infty.$$

Muunnoksessa z-tason suora PQ kuvautuu w-tason käyräksi $P'Q'$:



Kuva 1.6: Suora kuvautuu muunnoksessa ω paraabeliksi.

$$\begin{aligned} u &= (-3t + 1)^2 - (3t - 2)^2 = 6t - 3 \\ v &= 2(-3t + 1)(3t - 2) = -18t^2 + 18t - 4, \end{aligned}$$

eli

$$w = 6t - 3 + i(-18t^2 + 18t - 4).$$

Voimme myös kirjoittaa t:n u:n funktiona

$$t = \frac{1}{6}(u + 3),$$

jolloin

$$v = -\frac{1}{2}(u+3)^2 + 3(u+3) - 4 = -\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}$$

eli

$$w = u + \frac{i}{2}(1-u^2).$$

2° **Kiertopiste, leikkaus ja Riemannin pinta**
Esim. Kuvaus $w = z^{1/2}$ on kaksiarvoinen funktio. Napakoordinaattiesityksessä

$$z = re^{i(\phi+2\pi k)},$$

joten

$$w = \sqrt{r}e^{i(\phi/2+k\pi)}.$$

Riippuen kokonaisluvusta k saadaan kaksi mahdollista arvoa:

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{r}e^{i\phi/2}, \text{ kun } k=0 \\ w_2 &= \sqrt{r}e^{i(\phi/2+\pi)} = \sqrt{r}e^{i\phi/2}e^{i\pi} \\ &= -\sqrt{r}e^{i\phi/2} = -w_1, \text{ kun } k=1. \end{aligned}$$

- *päähaara* saadaan, kun $k = 0$.
- toinen haara saadaan, kun $k = 1$.
- kun $k = 2$, palataan päähaaralle.

Koska funktion $w = z^{1/2}$ arvo muuttuu, kun z-tasossa kierretään pisteen $z = 0$ ympäri kulman 2π verran (t.s. lisätään z:n vaihekulmaan 2π), sanotaan tätä pistettä *kiertopisteeksi.*
Merkitään

$$\Theta = \phi + 2\pi k; \ 0 \le \phi < 2\pi,$$

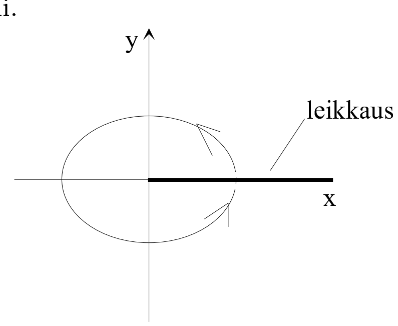
jolloin

$$z = re^{i\Theta}.$$

Voimme rajoittua yksiarvoiseen (yksikäsitteiseen) funktioon rajoittamalla kulman Θ arvoja:

1. piirretään z-tasoon viiva (suora tai käyrä), joka alkaa pisteestä $z = 0$ ja jatkuu äärettömyyteen.
2. sovitaan, että emme milloinkaan ylitä tätä viivaa eli kielletään 2π:n tai sitä suuremmat kierrot z-tasossa.

Näin menetellen funktio $z^{1/2}$ pysyy yksikäsitteisenä. Kompleksitason viivaa, jonka ylittäminen on kielletty, sanotaan *leikkaukseksi*: voimme ajatella, että kompleksitaso on leikattu auki pitkin tälläista viivaa, jolloin leikkauksen ylittäminen on mahdotonta. Leikkaukseksi on tapana valita mahdollisimman yksinkertainen viiva; tässä esimerkissä esim. positiivinen reaaliakseli.



Kuva 1.7: Esimerkki yksinkertaisesta leikkauksesta.

Kulman Θ arvosta riippuen päädymme funktion $z^{1/2}$ eri haaroihin:

- päähaara, jos $0 \le \Theta < 2\pi$.
- toinen haara, jos $2\pi \le \Theta < 4\pi$.

Molemmissa haaroissa $z^{1/2}$ on yksikäsitteinen. Vastaavia z-tason yksiarvoisuusalueita sanotaan *Riemannin lehdiksi.* Riemannin lehdet muodostavat *Riemannin pinnan.* Funktion $w = z^{1/2}$ Riemannin pinta muodostuu kahdesta Riemannin lehdestä, $0 \le \Theta < 2\pi$ ja $2\pi \le \Theta < 4\pi$, eli on pinta

$$z = re^{i\Theta}; \ r \ge 0, \ 0 \le \Theta < 4\pi.$$

Esim. Funktio $w = \ln z$ on äärettömän moniarvoinen. Napakoordinaateissa

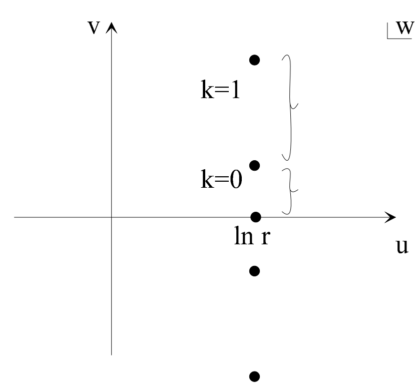
$$z = re^{i(\phi+2\pi k)}; \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ja

$$w = \ln r + i(\phi + 2\pi k).$$

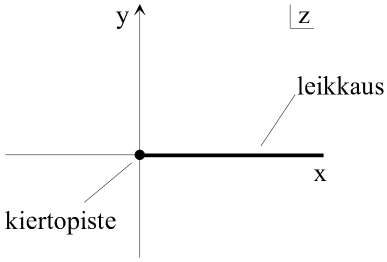
- päähaara: $k = 0$, jolloin
$$w = \ln r + i\phi.$$
- 1. sivuhaara: $k = 1$, jolloin
$$w = \ln r + i(\phi + 2\pi).$$

Huom! Kierroilla z-tasossa funktiota ei saada koskaan palaamaan päähaaralleen.



Kuva 1.8: Funktion $w = \ln z$ moniarvoisuus.

- kiertopiste: origo eli $z = 0$.
- leikkaus: positiivinen reaaliakseli.
- Riemannin lehti:
$2k\pi \le \phi < 2(k+1)\pi; \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- Riemannin pinta: $-\infty < \phi < \infty$.



Kuva 1.9: Kiertopiste ja leikkaus.

Esim. Funktio $w = (z^2+1)^{1/2}$. Kirjoitetaan tämä muotoon

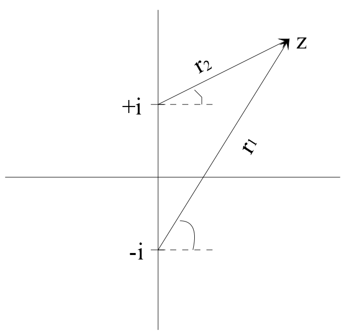
$$w = \sqrt{(z+i)(z-i)}$$

ja ilmaistaan $z+i$ ja $z-i$ napakoordinaateissa:

$$\begin{aligned} z+i &= r_1 e^{i(\phi_1+2\pi k_1)} \\ z-i &= r_2 e^{i(\phi_2+2\pi k_2)}. \end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\phi_1/2+k_1\pi)} e^{i(\phi_2/2+k_2\pi)} \\ &= \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\phi_1+\phi_2)/2} e^{i\pi(k_1+k_2)}. \end{aligned}$$

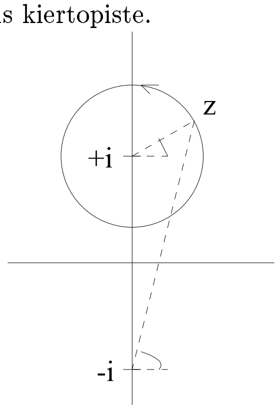


Kuva 1.10: $z = r_1 e^{i\phi_1} - i = r_2 e^{i\phi_2} + i$

Kierretään pisteen $z = i$ ympäri kulman 2π verran pitkin sellaista rataa, joka ei sulje sisäänsä pistettä $z = -i$. Tällöin k_2 kasvaa yhdellä k_1:n pysyessä ennallaan eli $k_1 + k_2 \to k_1 + k_2 + 1$. Oletetaan, että ennen kiertoa $k_1 + k_2 = 0$, joten kierron jälkeen $k_1 + k_2 = 1$. Kun merkitään vastaavia funktion arvoja symboleilla w_1 ja w_2, saadaan

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\phi_1+\phi_2)/2} \\ w_2 &= -\sqrt{r_1 r_2} e^{i(\phi_1+\phi_2)/2}. \end{aligned}$$

Piste $z = i$ on siis kiertopiste.

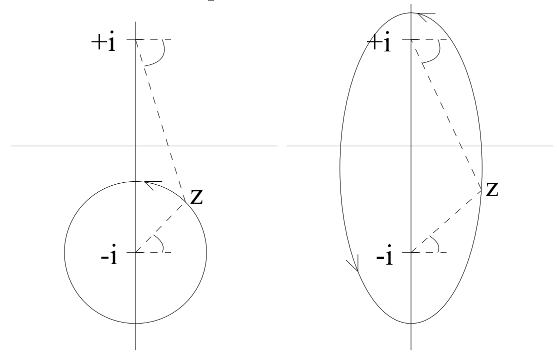


Kuva 1.11: Kierto pisteen $+i$ ympäri.

Kierretään pisteen $z = -i$ ympäri kulman 2π verran pitkin sellaista rataa, joka ei sulje sisäänsä pistettä $z = i$. Tällöin k_1 kasvaa yhdellä k_2:n pysyessä ennallaan eli $k_1 + k_2 \to k_1 + k_2 + 1$. Oletetaan, että ennen kiertoa $k_1 + k_2 = 0$, joten kierron jälkeen $k_1 + k_2 = 1$. Funktion arvot ennen kiertoa ja kierron jälkeen ovat

$$\begin{aligned} w_3 &= \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\phi_1+\phi_2)/2} \\ w_4 &= -\sqrt{r_1 r_2} e^{i(\phi_1+\phi_2)/2}, \end{aligned}$$

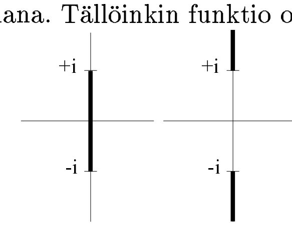
joten $z = -i$ on kiertopiste.



Kuva 1.12: Kierto pisteen $-i$ ympäri ja kierto pisteiden $+i$ ja $-i$ ympäri.

Jos kierretään kulman 2π verran pitkin sellaista rataa, joka sulkee sisäänsä molemmat pisteet $z = i$ ja $z = -i$, kasvavat sekä k_1 että k_2 yhdellä. Tällöin $k_1 + k_2$ kasvaa kahdella, joten funktion arvo on kierron jälkeen sama kuin ennen kiertoa. Funktio on siis tällöin yksikäsitteinen.

Jos kierretään pitkin rataa, joka ei sulje sisäänsä kumpaakaan pistettä, säilyy funktion vaihekulma muuttumattomana. Tällöinkin funktio on yksiarvoinen.



Kuva 1.13: Kompleksitason leikkaukset ω:lle.

Pisteet $z = \pm i$ ovat siis funktion $w = (z^2+1)^{1/2}$ kiertopisteet. Kompleksitaso voidaan leikata esimerkiksi pitkin imaginääriakselia joko pisteestä $z = -i$ pisteeseen $z = +i$ tai pisteistä $z = \pm i$ äärettömyyksiin pisteisiin $\pm i\infty$.

3° Alkeisfunktioita

a. Polynomit

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0.$$

b. Rationaalifunktiot

$$w = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

missä $P(z)$ ja $Q(z)$ ovat polynomeja.

c. Eksponenttifunktiot

$$\begin{aligned} w &= e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \\ a^z &= e^{z \ln a}. \end{aligned}$$

Esim.

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{i \cdot i\pi/2} = e^{-\pi/2} \text{ (pääarvo)},$$

sillä

$$\ln i = \ln e^{i(\pi/2+2k\pi)} \overset{k=0}{=} \ln e^{i\pi/2} = i\frac{\pi}{2}.$$

d. Trigonometriset funktiot

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \\ \cos z &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \\ \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}. \end{aligned}$$

Trigonometriset kaavat ovat voimassa myös kompleksimuuttujan funktioille; esim.

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

e. Hyperboliset funktiot

$$\begin{aligned} \sinh z &= \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} \\ \cosh z &= \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \\ \tanh z &= \frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}} \\ \coth z &= \frac{e^{z}+e^{-z}}{e^{z}-e^{-z}}, \end{aligned}$$

joille pätee esim.:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1.$$

f. Trigonometriset käänteisfunktiot

$$\begin{aligned} \sin^{-1} z &= \frac{1}{i}\ln(iz+\sqrt{1-z^2}) \\ \cos^{-1} z &= \frac{1}{i}\ln\left(\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{z}\right) \\ \tan^{-1} z &= \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \\ \cot^{-1} z &= \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right) \\ \sinh^{-1} z &= \ln(z+\sqrt{z^2+1}) \\ \cosh^{-1} z &= \ln(z+\sqrt{z^2-1}) \\ \tanh^{-1} z &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \\ \coth^{-1} z &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \end{aligned}$$

Esim. Osoitetaan, että $\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\ln(iz+\sqrt{1-z^2})$. Jos $w = \sin^{-1} z$, niin $z = \sin w$ eli

$$z = \frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}.$$

Kertomalla $2i$:llä saadaan

$$e^{iw} - 2iz - e^{-iw} = 0,$$

mistä edelleen kertomalla e^{iw}:llä saadaan

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

Tämä on suureen e^{iw} suhteen toisen asteen yhtälö, jonka ratkaisut ovat

$$e^{iw} = \frac{2iz \pm \sqrt{4-4z^2}}{2} = iz \pm \sqrt{1-z^2}.$$

Yhtälön vasen puoli säilyy muuttumattomana, vaikka lisäämme vaihekulmaan $2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$:

$$e^{i(w-2k\pi)} = iz \pm \sqrt{1-z^2}.$$

Ottamalla puolittain logaritmit saadaan

$$w = 2k\pi + \frac{1}{i}\ln(iz \pm \sqrt{1-z^2}).$$

Kun vaaditaan, että $\sin^{-1} 0 = 0$ eli rajoitutaan päähaaralle, nähdään, että täytyy olla $k = 0$. Koska funktiomerkintä $\sqrt{a}$ tarkoittaa molempia arvoja $\pm\sqrt{a}$, voimme kirjoittaa

$$w = \sin^{-1} z = \frac{1}{i}\ln(iz + \sqrt{1-z^2}).$$

4. Kompleksinen derivointi

Jatkuvuus: Olkoon $f(z)$ pisteessä $z = z_0$ ja sen ympäristössä määritelty yksiarvoinen funktio. Funktio on jatkuva pisteessä $z = z_0$, joss

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

eli

1. $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$
2. $f(z_0)$ on olemassa; $f(z)$ on määritelty pisteessä z_0.
3. $l = f(z_0)$.

Lyhyesti kirjoitetaan

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f\left(\lim_{z \to z_0} z\right).$$

Derivaatta: Jos $f(z)$ on yksiarvoinen funktio jossakin z-tason alueessa R, niin $f(z)$:n derivaatta $f'(z)$ määritellään seuraavasti:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Määrittely edellyttää, että raja-arvo on olemassa ja on riippumaton siitä, mitä tietä $\Delta z \to 0$. Tällöin sanotaan, että $f(z)$ on *differentioituva* pisteessä z.
Analyyttinen funktio: Jos derivaatta $f'(z)$ on olemassa kaikissa alueen R pisteissä, sanotaan että $f(z)$ on *analyyttinen* R:ssä.

1° **Cauchyn-Riemannin yhtälöt**
Välttämätön ehto sille, että

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

on analyyttinen alueessa R on, että u ja v toteuttavat Cauchyn-Riemannin ehdot R:ssä:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}$$

Jos e.m. osittaisderivaatat ovat jatkuvia R:ssä niin Cauchyn-Riemannin ehdot ovat myös riittävät sille, että $f(z)$ on analyyttinen R:ssä.
Todistus:
(i) Välttämättömyys.
Analyyttisyydestä seuraa, että raja-arvon

$$\begin{aligned}f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \{u(x+\Delta x, y+\Delta y) \\ &\quad +iv(x+\Delta x, y+\Delta y) \\ &\quad -u(x,y) - iv(x,y)\} \\ &\quad \times \frac{1}{\Delta x + i\Delta y}\end{aligned}$$

täytyy olla riippumaton siitä, miten $\Delta z \to 0$.
Tarkastellaan kahta tapausta:
1° $\Delta y = 0$ ja $\Delta x \to 0$. Tällöin

$$\begin{aligned}f'(z) &= \lim_{\Delta x \to 0} \{u(x+\Delta x, y) - u(x,y) \\ &\quad +i(v(x+\Delta x, y) - v(x,y))\} \frac{1}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}$$

2° $\Delta x = 0$ ja $\Delta y \to 0$. Tällöin

$$\begin{aligned}f'(z) &= \lim_{\Delta y \to 0} \{u(x, y+\Delta y) - u(x,y) \\ &\quad +i(v(x, y+\Delta y) - v(x,y))\} \frac{1}{i\Delta y} \\ &= -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned}$$

Koska raja-arvot ovat tiestä riippumattomia, täytyy olla

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

eli

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ ja } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

(ii) Riittävyys. Oletetaan, että derivaatat

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &\equiv u_x(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &\equiv u_y(x,y)\end{aligned}$$

ovat jatkuvia. Koska derivaatta u_x on olemassa, voidaan kirjoittaa

$$\frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y+\Delta y)}{\Delta x} = u_x(x, y+\Delta y) + \delta_1,$$

missä $\delta_1 \to 0$, kun $\Delta x \to 0$. Derivaatan u_x jatkuvuudesta seuraa, että

$$u_x(x, y+\Delta y) = u_x(x,y) + \epsilon_1,$$

missä $\epsilon_1 \to 0$, kun $\Delta y \to 0$. Siis

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y+\Delta y) = (u_x(x,y) + \xi_1)\Delta x,$$

missä $\xi_1 = \delta_1 + \epsilon_1 \to 0$, kun $\Delta x, \Delta y \to 0$. Vastaavasti voidaan kirjoittaa

$$u(x, y+\Delta y) - u(x,y) = (u_y(x,y) + \eta_1)\Delta y,$$

missä $\eta_1 \to 0$, kun $\Delta x, \Delta y \to 0$.
Nyt

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) \\ &= u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y+\Delta y) \\ &\quad +u(x, y+\Delta y) - u(x,y) \\ &= (u_x(x,y) + \xi_1)\Delta x + (u_y(x,y) + \eta_1)\Delta y \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \xi_1 \Delta x + \eta_1 \Delta y,\end{aligned}$$

missä $\xi_1 \to 0$ ja $\eta_1 \to 0$, kun $\Delta x \to 0$ ja $\Delta y \to 0$. Aivan samoin derivaattojen $\frac{\partial v}{\partial x}$ ja $\frac{\partial v}{\partial y}$ jatkuvuuden perusteella voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}\Delta v &= v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) \\ &= \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \xi_2 \Delta x + \eta_2 \Delta y,\end{aligned}$$

missä $\xi_2 \to 0$ ja $\eta_2 \to 0$, kun $\Delta x \to 0$ ja $\Delta y \to 0$. Tällöin

$$\begin{aligned}\Delta w &= \Delta u + i\Delta v \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x \\ &\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y \\ &\quad +\xi\Delta x + \eta\Delta y,\end{aligned}$$

missä $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ ja $\eta = \eta_1 + i\eta_2$.
Sovelletaan toiseen termiin Cauchyn-Riemannin yhtälöitä, jolloin

$$\begin{aligned}\Delta w &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x \\ &\quad + \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta y \\ &\quad +\xi\Delta x + \eta\Delta y \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) \\ &\quad +\xi\Delta x + \eta\Delta y.\end{aligned}$$

Annetaan nyt $\Delta x \to 0$ ja $\Delta y \to 0$. Tällöin $\xi \to 0$ ja $\eta \to 0$ ja

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta w}{\Delta x + i\Delta y} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

riippumatta siitä, miten $\Delta z \to 0$. Raja-arvo

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

on siis olemassa ja on yksikäsitteinen, joten $f(z)$ on analyyttinen.

2° Harmoniset funktiot
Jos kompleksifunktion $f(z)$ reaali- ja imaginääriosien u ja v derivaatat x:n ja y:n suhteen ovat olemassa ja jatkuvia alueessa R, niin

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned}$$

Toisin sanoen analyyttisen funktion reaali- ja imaginääriosat toteuttavat *Laplacen* yhtälön

$$\nabla^2 \psi = 0,$$

missä

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

on *Laplacen operaattori* ja ψ on *harmoninen funktio.*
Todistus: *Cauchyn-Riemannin yhtälöiden perusteella*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Derivoidaan tämä puolittain x:n suhteen, jolloin

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \\ &\overset{(C-R)}{=} -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

eli

$$\nabla^2 u = 0.$$

Vastaavasti Cauchyn-Riemannin ehdosta

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

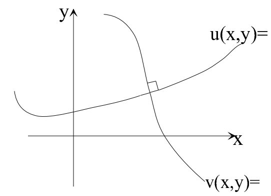
saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} \\ &\overset{(C-R)}{=} -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

eli

$$\nabla^2 v = 0.$$

3° Ortogonaaliset käyrästöt



Kuva 1.14: Ortogonaaliset käyrät u ja v.

Olkoot u ja v kompleksifunktion $f(z)$ reaali- ja imaginääriosat. Jos α ja β ovat vakioita, niin yhtälöt

$$u(x,y) = \alpha \text{ ja } v(x,y) = \beta \qquad (1)$$

esittävät xy-tasossa kahta käyräparvea. Jos $f(z)$ on analyyttinen funktio, niin käyräparvet ovat ortogonaalisia (kohtisuorassa toisiaan vastaan). Yhtälöistä (1) voidaan periaatteessa y ratkaista x:n funktiona:

$$y = y_1(x) \text{ ja } y = y_2(x).$$

Derivoidaan yhtälöt (1) x:n suhteen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} &= 0. \end{aligned}$$

Käyrien kulmakertoimiksi saadaan

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{dy_1}{dx} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y_1}} \\ k_2 &= \frac{dy_2}{dx} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y_2}}. \end{aligned}$$

Käyrien leikkauspisteessä $y_1(x) = y_2(x) = y$, jolloin

$$\begin{aligned} k_1 \cdot k_2 &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}} \\ &\overset{(C-R)}{=} \frac{-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}} \\ &= -1, \end{aligned}$$

kun sovelletaan osoittajaan Cauchyn-Riemannin yhtälöitä. Käyrien ortogonaalisuusehdon, —käyrät ovat ortogonaalisia, jos niiden kulmakertoimien tulo annetussa pisteessä on -1 —, mukaan käyrät $u = \alpha$ ja $v = \beta$ siis leikkaavat toisensa kohtisuorasti.
Esim. $f(z) = z^2$. Nyt $u = x^2 - y^2$ ja $v = 2xy$. Merkitään $x^2 - y^2 = \alpha$ ja $2xy = \beta$. Ratkaistaan näistä y, jolloin saadaan käyrien yhtälöiksi

$$\begin{aligned} y^2 &= x^2 - \alpha \\ y &= \frac{\beta}{2x}. \end{aligned}$$

Derivoidaan x:n suhteen:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{x}{y} = k_1 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{\beta}{2x^2} = -\frac{y}{x} = k_2,\end{aligned}$$

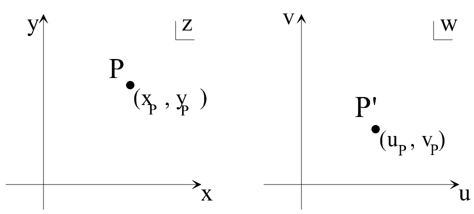
joten $k_1 \cdot k_2 = -1$.

4° **Koordinaatistomuunnos ja käyräviivainen koordinaatisto**
Tarkastellaan analyyttistä muunnosta

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Olkoon P piste, jonka koordinaatit z-tasossa ovat (x_p, y_p). Transformaation vaikutus pisteeseen P voidaan käsittää kahdella eri tavalla:

1. piste P kuvautuu w-tason pisteeksi $(u(x_p, y_p), v(x_p, y_p))$. Tällöin w-tason pisteet esitetään suoraviivaisten koordinaattien u ja v avulla.

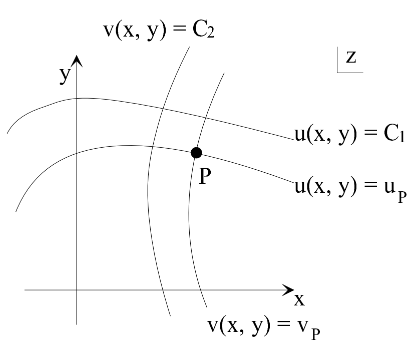


Kuva 1.15: Piste P kuvautuu ω-tason pisteeksi P'.

2. ajatellaan z-tason käyrien

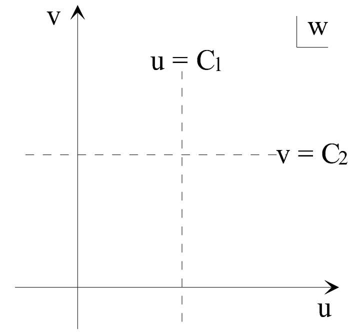
$$\begin{aligned}u(x,y) &= C_1 \\ v(x,y) &= C_2,\end{aligned}$$

missä C_1 ja C_2 ovat vakioita, olevan n.s. *koordinaattikäyriä.* Pisteen P paikka z-tasossa voidaan ilmoittaa näiden käyrien leikkauspisteenä, t.s. jos $u(x_p, y_p) = u_p$ ja $v(x_p, y_p) = v_p$, niin pisteen P paikka z-tasossa on siellä, missä käyrät $u(x,y) = u_p$ ja $v(x,y) = v_p$ leikkaavat toisensa. Sanotaan, että u_p ja v_p ovat P:n *käyräviivaiset koordinaatit.*



Kuva 1.16: Piste P on käyrien $u = u_p$ ja $v = v_p$ leikkauspiste.

w-tasossa koordinaattikäyrät $u(x,y) = C_1$ ja $v(x,y) = C_2$ kuvautuvat keskenään ortogonaalisiksi suoriksi.



Kuva 1.17: w-tasolla $u = C_1$ ja $u = C_2$ ovat suoria.

5° **Singulariteetit**
Pistettä, jossa $f(z)$ ei ole analyyttinen, kutsutaan *singulaariseksi* pisteeksi tai *singulariteetiksi.*
Funktion $f(z)$ singulaarinen piste $z = z_0$ on *eristetty singulariteetti*, jos on olemassa $\delta > 0$ siten, että ympyrä $|z - z_0| = \delta$ ei sulje sisäänsä muita singulariteetteja kuin $z = z_0$. Jos sellaista δ:n arvoa ei löydy, niin z_0 on *ei-eristetty singulariteetti.*
Funktion $f(z)$ *tavalliset pisteet* ovat pisteitä, jotka eivät ole singulaarisia. Jos z_0 on tavallinen piste, niin voidaan aina löytää sellainen $\delta > 0$, että ympyrä $|z - z_0| = \delta$ ei sulje sisäänsä yhtään singulaarista pistettä.
Singulariteettien luokittelu
1. Napa
Jos on olemassa positiivinen kokonaisluku n siten, että

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0,$$

niin $z = z_0$ on funktion $f(z)$ n-kertainen napa. Jos $n = 1$, niin z_0 on yksinkertainen napa.
Esim. Funktiolla

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^3}$$

on 3-kertainen napa pisteessä $z = 2$. Funktiolla

$$f(z) = \frac{3z+6}{(z-1)^2(z+2)(z+1)(z-4)}$$

on kaksinkertainen napa pisteessä $z = 1$ ja yksinkertaiset navat pisteissä $z = -2$, $z = -1$ ja $z = 4$.
2. Kiertopiste
Moniarvoisen funktion kiertopiste on singulaarinen piste.
Esim. Funktiolla

$$\sqrt{z-3}$$

on kiertopiste pisteessä $z = 3$. Funktiolla

$$\ln(z^2 + z - 2)$$

on kiertopisteet siellä, missä $z^2 + z - 2 = 0$, t.s. pisteissä $z = 1$ ja $z = -2$.
3. Oleellinen singulariteetti
Singulariteetti, joka ei ole napa eikä kiertopiste on oleellinen (*essential*) singulariteetti.
Esim. Funktiolla

$$f(z) = e^{1/(z-2)}$$

on oleellinen singulariteetti pisteessä $z = 2$.

Huom. Useimmilla funktioilla on singulariteetti jossakin; jos ei muualla, niin äärettömyydessä. Esim. funktiolla

$$f(z) = z^3$$

on kolminkertainen napa äärettömyydessä. Tämä nähdään sijoittamalla $w = 1/z$, jolloin

$$f(z) = f(1/w) = \frac{1}{w^3},$$

t.s. 3-kertainen napa muuttujan w suhteen pisteessä $w = 0$ eli pisteessä $z = \infty = \lim_{w\to 0}(\frac{1}{w})^3$.

Vektorilaskentaa

1. Johdanto

Vektoreilla on suunta ja suuruus, skalaareilla on ainoastaan suuruus. Vektoreita merkitään joko lihavoiduilla symboleilla ($\boldsymbol{A}$), yläviivalla ($\bar{A}$) tai nuolella ($\vec{A}$).

Tarkastellaan (enimmäkseen) kolmiulotteisia vektoreita. Olkoot A_x, A_y ja A_z vektorin $\boldsymbol{A}$ *komponentit* koordinaattiakselien suhteen. Tällöin

$$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z).$$

Koordinaattiakselien suuntaisia *yksikkövektoreita* merkitään symboleilla $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ ja $\boldsymbol{k}$ (tai $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ tai $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$). Esim. $\boldsymbol{i}$ on x-akselin suuntainen vektori, jonka pituus on 1. Komponenttiesityksessä yksikkövektorit ovat

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i} &= (1,0,0) \\ \boldsymbol{j} &= (0,1,0) \\ \boldsymbol{k} &= (0,0,1). \end{aligned}$$

Yksikkövektoreiden avulla vektori $\boldsymbol{A}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}.$$

Vektorin $\boldsymbol{A}$ pituutta eli itseisarvoa merkitään joko vastaavalla lihavoimattomalla (yläviivattomalla, ...) symbolilla tai itseisarvomerkeillä. Vektorin pituus on määritelty Pythagoraan teoreeman avulla seuraavasti:

$$A = |\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}.$$

Vektoreiden $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ja $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ summa on määritelty seuraavasti:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z).$$

Vektori kerrotaan skalaarilla, kuten

$$m\boldsymbol{A} = (mA_x, mA_y, mA_z).$$

Yhteenlasku ja skalaarilla kertominen noudattavat laskulakeja:

1. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$
2. $\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$
3. $m\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}m$
4. $m(n\boldsymbol{A}) = (mn)\boldsymbol{A}$
5. $(m+n)\boldsymbol{A} = m\boldsymbol{A} + n\boldsymbol{A}$
6. $m(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = m\boldsymbol{A} + m\boldsymbol{B}$.

Yleisesti *yksikkövektori* on vektori, jonka pituus on 1. $\boldsymbol{A}$:n suuntainen yksikkövektori $\hat{\boldsymbol{a}}$ on

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\boldsymbol{A}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}.$$

Pisteen P, jonka koordinaatit ovat (x, y, z), paikka voidaan ilmoittaa *paikka-* eli *radiusvektorin* $\boldsymbol{r}$ avulla:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= r_x\boldsymbol{i} + r_y\boldsymbol{j} + r_z\boldsymbol{k} \\ &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \\ &= (x, y, z). \end{aligned}$$

Skalaarikenttä on yksikäsitteinen paikasta riippuva skalaarisuure.
Vektorikenttä on yksikäsitteinen paikasta riippuva vektorisuure.
Esim. Lämpötila paikan funktiona on skalaarikenttä. Tuulen nopeus $\boldsymbol{v}$ on paikan funktiona vektorikenttä (eräs *virtauskenttä*):

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}(x, y, z).$$

Muita tavallisia vektorikenttiä ovat m.m. sähkö- ja magneettikenttä sekä virtauskentät yleensä.

2. Vektoritulot

1° **Piste- eli skalaaritulo**
Olkoot $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ vektoreita ja θ niiden välinen kulma. Pistetulo $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ määritellään siten, että

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \cos\theta.$$

Pistetulo $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ on skalaarisuure. Pistetulo $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ on 0, jos vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ($\boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{B}$). Jos $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}$, voidaan siis kirjoittaa komponenttimuodossa

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} &= A_xB_x\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} + A_xB_y\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} + \cdots \\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \end{aligned}$$

Skalaaritulo noudattaa laskulakeja:

$$\begin{aligned} &1. \quad \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \\ &2. \quad \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} \\ &3. \quad m\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = (m\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cdot (m\boldsymbol{B}), \end{aligned}$$

missä m on skalaari.
Esim. Mikä on vektoreiden

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{B} &= 6\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

välinen kulma?
Nyt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} &= |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \\ &= 12 - 6 - 2 = 4, \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}| &= \sqrt{4+4+1} = 3 \\ |\boldsymbol{B}| &= \sqrt{36+9+4} = 7, \end{aligned}$$

eli

$$3 \cdot 7 \cos\theta = 4.$$

Tästä

$$\cos\theta = \frac{4}{21}$$

ja

$$\theta = \arccos\left(\frac{4}{21}\right) \approx 79°.$$

Esim. Osoita, että r-säteistä ympyrärataa vakionopeudella (vakiovauhdilla) v kiertävän massapisteen kiihtyvyys on suuntautunut kohti ympyräradan keskipistettä ja on suuruudeltaan v^2/r.
Olkoon radan keskipiste origossa. Massapisteen paikkaa kuvaa radiusvektori $\boldsymbol{r}$, joka nyt on pituudeltaan vakio r. Tällöin myös

$$\boldsymbol{r}^2 \equiv \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} = |\boldsymbol{r}||\boldsymbol{r}| = r^2 = \text{vakio}. \tag{1}$$

Hiukkasen nopeus $\boldsymbol{v}$ on hiukkasen paikan derivaatta ajan suhteen, t.s.

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}).$$

Helposti voidaan osoittaa, että

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \frac{d\boldsymbol{B}}{dt}.$$

Derivoimalla yhtälö (1) ajan suhteen saadaan

$$0 = 2\boldsymbol{r} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 2\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v},$$

eli

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} = 0. \tag{2}$$

Samoin, koska v on vakio eli

$$\boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = v^2 = \text{vakio},$$

saadaan

$$2\boldsymbol{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 2\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} = 0,$$

missä $\boldsymbol{a}$ on massapisteen kiihtyvyys. T.s.

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} = 0.$$

Derivoimalla yhtälö (2) saadaan

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = 0,$$

eli

$$ra\cos\theta = -v^2,$$

missä θ on vektoreiden $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{r}$ välinen kulma.
Oletetaan, että ratataso ei kierry ajan myötä. Tällöin kaikki vektorit, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{a}$ ovat samassa tasossa (jos esim. $\boldsymbol{r} = (x, y, 0)$, niin $\boldsymbol{v} = (dx/dt, dy/dt, 0)$ on myös xy-tasossa). Koska $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{v}$, täytyy olla

$$\theta = 0 \text{ tai } 180°.$$

Näistä ilmeisestikin vain jälkimmäinen kelpaa, joten $\cos\theta = -1$ ja

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

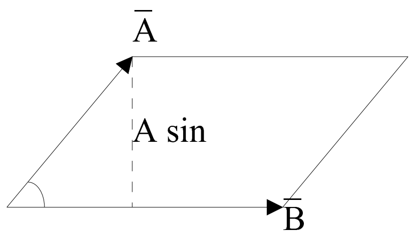
Kun merkitään symbolilla $\hat{\boldsymbol{r}}$ radiusvektorin suuntaista yksikkövektoria, t.s. vektoria

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|},$$

voidaan kiihtyvyys kirjoittaa vektorisuureena, kuten

$$\boldsymbol{a} = -\frac{v^2}{r}\hat{\boldsymbol{r}}.$$

2° **Risti- eli vektoritulo**



Kuva 2.1: Kuvio ristitulosta.

Vektoreiden $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ ristitulo $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ on *vektori*

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \sin\theta \boldsymbol{u},$$

missä θ on vektoreiden $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ välinen kulma, ja $\boldsymbol{u}$ yksikkövektori, joka on kohtisuorassa vektoreiden $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ määräämää tasoa vastaan.

Geometrisesti vektorin $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ pituus $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|$ on sellaisen suunnikkaan pinta-ala, jonka sivuina ovat vektorit $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$.

Vektoritulo toteuttaa laskusäännöt

1. $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$
2. $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}$
3. $m(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (m\boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \times (m\boldsymbol{B}),$

kun m on skalaari.

Ristitulo $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ on nolla, jos vektorit $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ ovat yhdensuuntaiset ($\boldsymbol{A} \parallel \boldsymbol{B}$; $\theta = 0$ tai $\theta = 180°$).

Yksikkövektoreiden ristitulot ovat

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \;\; \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \;\; \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.$$

Jos siis $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, niin vektorit $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ ja $\boldsymbol{C}$ muodostavat *oikeakätisen* koordinaattisysteemin: oikean käden peukalon osoittaessa vektorin $\boldsymbol{A}$ suuntaan ja etusormen vektorin $\boldsymbol{B}$ suuntaan osoittaa keskisormi vektorin $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ suuntaan.

Kirjoitettuna komponenttimuodossa ristitulo on

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= (A_y B_z - A_z B_y)\boldsymbol{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\boldsymbol{j} \\ &\quad + (A_x B_y - A_y B_x)\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

Helpoimmin muistettava komponenttiesitys saadaan determinantin avulla:

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

3° **Skalaarikolmitulo**

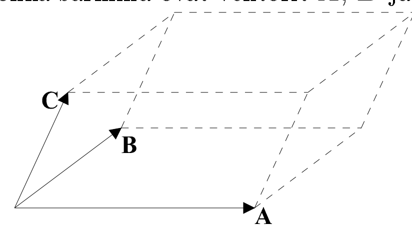
Vektorien $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ ja $\boldsymbol{C}$ skalaarikolmitulo on *skalaari*

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}).$$

Komponenttimuodossa tämä voidaan kehittää seuraavasti:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} &= A_x(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})_x + A_y(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})_y \\ &\quad + A_z(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})_z \\ &= A_x(B_y C_z - B_z C_y) \\ &\quad + A_y(B_z C_x - B_x C_z) \\ &\quad + A_z(B_x C_y - B_y C_x) \\ &= A_x B_y C_z + C_x A_y B_z + B_x C_y A_z \\ &\quad - A_x C_y B_z - B_x A_y C_z - C_x B_y A_z \\ &= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Geometrisesti skalaarikolmitulo on sen suuntaissärmiön tilavuus, jonka särminä ovat vektorit $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ ja $\boldsymbol{C}$.



Kuva 2.2: Skalaarikolmitulo.

4° **Vektorikolmitulo**

Kolmesta vektorista $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ ja $\boldsymbol{C}$ voidaan muodostaa neljäs vektori muodostamalla ensin kahden vektorin ristitulo ja sitten tämän ja kolmannen vektorin ristitulo. Riippuen siitä, missä järjestyksessä tulot muodostetaan, saadaan kaksi tapausta:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) &= (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \\ (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} &= (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{A}. \end{aligned}$$

Muistisääntönä voi käyttää sitä, että sulkujen ulkopuolinen tekijä on skalaarituloissa tekijänä ensin ulommaisen (+-merkki) ja sitten keskimmäisen ($-$-merkki) vektorin kanssa.

Vektorikolmitulolle ei ole yksinkertaista geometrista tulkintaa.

Helposti voidaan osoittaa, että

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{C} \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{0}.$$

Huom. Symboli $\boldsymbol{0}$ (tai $\bar{0}$, $\vec{0}$,...) tarkoittaa *vektoria* $(0, 0, 0)$. Vektorista $\boldsymbol{0}$ käytetään kuitenkin useimmiten skalaarimerkintää 0. Asiayhteydestä on selvää, tarkoittaako tämä skalaaria vai vektoria.

5° **Levi-Civitan permutaatiosymboli**

Esimerkiksi 3-determinanttien eksplisiittinen lauseke voidaan ilmaista kompaktisti Levi-Civitan symbolin ϵ_{ijk} avulla. Tässä indeksit i, j ja k saavat arvokseen (yleensä) joko luvut 1, 2 ja 3 tai koordinaattiakselit x, y ja z. Levi-Civitan symboli on määritelty siten, että $\epsilon_{ijk} = 0$, jos kaksi (tai kolme) indekseistä on samoja (esim. $\epsilon_{iji} = 0$). Muutoin on

$$\epsilon_{ijk} = (-1)^P,$$

missä P tarkoittaa sitä indeksien vaihtojen (permutaatioiden) lukumäärää, joka tarvitaan kombinaation ijk aikaansaamiseksi peruskombinaatiosta 123 (tai xyz).

Esim. Peruskombinaatio: $\epsilon_{123} = 1$. Vaihdetaan indeksit 1 ja 3, jolloin $P = 1$ ja $\epsilon_{321} = -1$. Vaihdetaan nyt 1. ja 2. indeksi, jolloin $P = 2$ ja $\epsilon_{231} = 1$.
3×3-determinatti voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k.$$

Usein on tapana jättää summamerkintä kirjoittamatta, jolloin toistuvat indeksit tarkoittavat summausta:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k.$$

Kun merkitään yksikkövektoreita $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ ja $\boldsymbol{k}$ symboleilla $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ja $\boldsymbol{e}_3$ (usein myös $\hat{\mathbf{e}}_1, \ldots$ tai $\hat{e}_1, \ldots$), voidaan ristitulo kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \\ &= \epsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_i A_j B_k. \end{aligned}$$

Usein tarvittava suure on myös n.s. *Kroneckerin δ-symboli*:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{kun } i \neq j \\ 1, & \text{kun } i = j. \end{cases}$$

Esim. Suorakulmaisessa koordinaatistossa voidaan skalaaritulo kirjoittaa muotoon:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \sum_{i,j} \delta_{ij} A_i B_j.$$

3. Differentiaalilaskentaa

1° "Tavallinen" derivaatta
Useamman muuttujan funktiolle tavallinen derivaatta tarkoittaa (yleensä) osittaisderivaattaa jonkin muuttujan suhteen. Jos esim. $\phi(x, y, z) = \phi(\boldsymbol{r})$ on skalaarikenttä, niin $\partial\phi/\partial y$ tarkoittaa funktion ϕ derivaattaa muuttujan y suhteen. Vektorikentän (tavallinen) osittaisderivaatta on vektori, jonka komponentteina ovat kentän komponenttien derivaatat. Tavalliset derivoimissäännöt pätevät muuttujien x, y ja z suhteen otetuille osittaisderivaatoille.
Esim. Jos

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = 2xy^2\boldsymbol{i} + 3zy\boldsymbol{j} + 4y\boldsymbol{k}$$

on vektorikenttä, niin $\partial\boldsymbol{V}/\partial y$ on vektori(kenttä)

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y} = 4xy\boldsymbol{i} + 3z\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}.$$

2° Skalaarikentän suunnattu derivaatta
Olkoon $\phi(x, y, z)$ jokin skalaarikenttä. Jos $\boldsymbol{e}_a$ on vektorin $\boldsymbol{a}$ suuntainen yksikkövektori, t.s.

$$\boldsymbol{e}_a = \frac{\boldsymbol{a}}{a},$$

niin vektorin $\boldsymbol{a}$ suuntaisella derivaatalla $\nabla_a\phi$ tarkoitetaan vektoria

$$\nabla_a \phi(\boldsymbol{r}) = \left[\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\phi(\boldsymbol{r} + \Delta u \boldsymbol{e}_a) - \phi(\boldsymbol{r})}{\Delta u} \right] \boldsymbol{e}_a.$$

Usein merkitään myös

$$\nabla_a \phi \equiv \boldsymbol{e}_a \frac{\partial \phi}{\partial a}.$$

Esim. Karteesisten koordinaattiakselien suuntaiset derivaatat:

x:n suuntainen derivaatta	$\nabla_x\phi = \boldsymbol{i}\partial\phi/\partial x$
y:n suuntainen derivaatta	$\nabla_y\phi = \boldsymbol{j}\partial\phi/\partial y$
z:n suuntainen derivaatta	$\nabla_z\phi = \boldsymbol{k}\partial\phi/\partial z$.

Esim. Radiusvektorin $\boldsymbol{r}$ suuntainen derivaatta:

$$\nabla_r \phi = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial \phi}{\partial r},$$

missä $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3° Nabla-operaattori
Karteesisissa koordinaateissa määritellään operaattori ∇ siten, että

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Operaattori ∇ voidaan lausua myös muissa koordinaatistoissa. Esim. pallokoordinaatistossa on

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi},$$

kun $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ ja $\boldsymbol{e}_\phi$ ovat pallokoordinaatiston yksikkövektorit.

4° Skalaarifunktion gradientti
Vektorisuuretta

$$\mathrm{grad}\phi(\boldsymbol{r}) = \nabla\phi(\boldsymbol{r})$$

sanotaan skalaarifunktion $\phi(x, y, z)$ gradientiksi. Karteesisissa koordinaateissa gradientti on

$$\nabla\phi = \boldsymbol{i}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Esim. 1. Jos $\phi(x, y, z) = 2xyz$, niin

$$\nabla\phi = 2yz\boldsymbol{i} + 2xz\boldsymbol{j} + 2xy\boldsymbol{k}.$$

Esim. 2. Lasketaan $\nabla\phi(|\boldsymbol{r}|)$. Koska ϕ riippuu ainoastaan radiusvektorin $\boldsymbol{r}$ pituudesta $r = |\boldsymbol{r}|$, on kätevintä laskea gradientti pallokoordinaatistossa:

$$\begin{aligned} \nabla\phi(r) &= \boldsymbol{e}_r \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{\partial \phi(r)}{r\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\phi \frac{\partial \phi(r)}{r \sin\theta \partial \phi} \\ &= \boldsymbol{e}_r \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{\partial \phi(r)}{\partial r}. \end{aligned}$$

Jos esim. $\phi(r) = 1/r^2$, niin

$$\nabla\left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\left(-\frac{2}{r^3}\right) = -\frac{2}{r^4}\boldsymbol{r}.$$

5° **Skalaarifunktion differentiaali**
Jos $\phi(\boldsymbol{r})$ on skalaarifunktio, niin sen differentiaali $d\phi(\boldsymbol{r})$ on

$$\begin{aligned} d\phi(\boldsymbol{r}) &= d\phi(x,y,z) = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz \\ &= \nabla\phi\cdot d\boldsymbol{r}, \end{aligned}$$

missä differentiaali $d\boldsymbol{r}$ (tai $d\bar{r}$ tai $d\vec{r}\ \ldots$) tarkoittaa vektoria

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}dx + \boldsymbol{j}dy + \boldsymbol{k}dz.$$

6° **Vektorifunktion divergenssi**
Vektorikentän

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}(x,y,z) = F_x(\boldsymbol{r})\boldsymbol{i} + F_y(\boldsymbol{r})\boldsymbol{j} + F_z(\boldsymbol{r})\boldsymbol{k}$$

divergenssi div $\boldsymbol{F}$ on

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \nabla\cdot\boldsymbol{F},$$

missä

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\boldsymbol{F} &= \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}) \\ &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Esim. Jos

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = xy^2\boldsymbol{i} - 2yz\boldsymbol{j} + x^2z\boldsymbol{k},$$

niin

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F} = y^2 - 2z + x^2.$$

7° **Vektorifunktion roottori**
Vektorikentän $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}(x,y,z)$ roottori rot $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ on

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}).$$

Tässä ristitulon määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} \nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

Levi-Civitan symbolin avulla voidaan komponenttiesitys kirjoittaa muotoon

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = \epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}F_k.$$

Tässä $x_1 = x$, $x_2 = y$ ja $x_3 = z$.
Roottori on vektorikenttä.

8° **Laplacen operaattori**
Laplace-operaattori ∇^2 on

$$\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

9° **Laskukaavoja**
Olkoot $\phi(x,y,z)$ ja $\psi(x,y,z)$ skalaarifunktioita sekä $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ ja $\boldsymbol{G}(x,y,z)$ vektorifunktioita. Tällöin

1. $\nabla(\phi+\psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$
2. $\nabla\cdot(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) = \nabla\cdot\boldsymbol{F} + \nabla\cdot\boldsymbol{G}$
3. $\nabla\times(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) = \nabla\times\boldsymbol{F} + \nabla\times\boldsymbol{G}$
4. $\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{F}) = (\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{F} + \phi(\nabla\cdot\boldsymbol{F})$
5. $\nabla\times(\phi\boldsymbol{F}) = (\nabla\phi)\times\boldsymbol{F} + \phi(\nabla\times\boldsymbol{F})$
6. $\nabla\cdot(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{G})$
7. $\nabla\times(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}) = (\boldsymbol{G}\cdot\nabla)\boldsymbol{F} - \boldsymbol{G}(\nabla\cdot\boldsymbol{F})$
   $-(\boldsymbol{F}\cdot\nabla)\boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}(\nabla\cdot\boldsymbol{G})$
8. $\nabla(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}) = (\boldsymbol{G}\cdot\nabla)\boldsymbol{F} + (\boldsymbol{F}\cdot\nabla)\boldsymbol{G}$
   $+\boldsymbol{G}\times(\nabla\times\boldsymbol{F}) + \boldsymbol{F}\times(\nabla\times\boldsymbol{G})$
9. $\nabla\times\nabla\phi = 0$
10. $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F}) = 0$
11. $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F}) - \nabla^2\boldsymbol{F}$

Kaava 9 sanoo, että gradientin roottori häviää ja kaava 10 sanoo, että roottorin divergenssi häviää.
Esim. Osoitetaan oikeaksi kaava 7. Roottorin ja ristitulon määritelmän mukaan on

$$\nabla\times(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}) = \epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}\epsilon_{klm}F_lG_m.$$

Helposti voidaan osoittaa, että

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}.$$

Sijoittamalla tämä, saadaan

$$\begin{aligned} \nabla\times(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{e}_i\left[\frac{\partial}{\partial x_j}(F_iG_j) - \frac{\partial}{\partial x_j}(F_jG_i)\right] \\ &= \boldsymbol{e}_i\Bigg[F_i\frac{\partial G_j}{\partial x_j} + G_j\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \\ &\qquad -F_j\frac{\partial G_i}{\partial x_j} - G_i\frac{\partial F_j}{\partial x_j}\Bigg] \\ &= \boldsymbol{F}\nabla\cdot\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{G}\cdot\nabla)\boldsymbol{F} \\ &\quad -(\boldsymbol{F}\cdot\nabla)\boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}\nabla\cdot\boldsymbol{F}. \end{aligned}$$

10° **Lähteettömät ja pyörteettömät kentät**
a. Divergenssin fysikaalinen tulkinta ja kontinuiteettiyhtälö
Tarkastellaan esimerkkinä nestevirtaa

$$\boldsymbol{F} = \rho\boldsymbol{v},$$

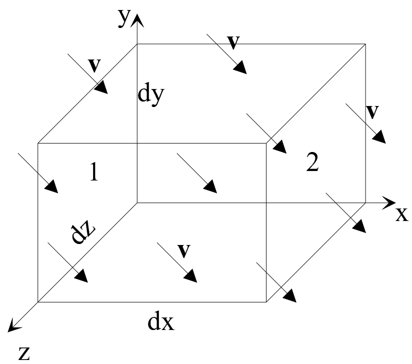
missä

$$\rho = \rho(x, y, z)$$

on nesteen tiheys ja

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y, z)$$

nesteen nopeus.



Kuva 2.3: Tasainen virtaus pintojen 1 *ja* 2 *läpi.*

Aikayksikössä pinnan 1 läpi $+x$-suuntaan virtaava nestemäärä on

$$(\rho v_x) dy dz,$$

missä ρv_x on virtavektorin $\boldsymbol{F}$ x-komponentti pinnalla 1. Pinnalla 2 on virtavektorin x-komponentti

$$F_x + dF_x = \rho v_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) dx,$$

ja aikayksikössä pinnan 2 läpi ulos virtaava nestemäärä

$$\left[\rho v_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) dx\right] dy dz.$$

Nesteen nettovirtaama x-suunnassa aikayksikössä on siis

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) dx dy dz.$$

Vastaavat lausekkeet saadaan y- ja z-suuntaisille virtaamille, joten nesteen nettovuo tilavuudesta $dxdydz$ on

$$\left(\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z}\right) dx dy dz = \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) dV.$$

Virtauskenttä on *lähteetön* pisteessä $\boldsymbol{r}$, jos k.o. pistettä ympäröivään tilavuusalkioon tulevan ja siitä lähtevän virran määrä on sama. Pisteessä $\boldsymbol{r}$ ei siis ole lähdettä eikä nielua.

Jos neste on lisäksi kokoonpuristumatonta, t.s. $\rho(x, y, z)$ on vakio (ja $\partial\rho/\partial t = 0$), niin lähteettömässä pisteessä

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0.$$

Tämä on kokoonpuristumattoman lähteettömän nestevirtauksen *kontinuiteettiyhtälö* eli säilymisyhtälö. Yleisessä tapauksessa kontinuiteettiyhtälö on

$$\frac{\partial \rho(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = \psi(\boldsymbol{r}, t),$$

missä $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ on lähdetiheys-nielutiheys.

Lähteettömässä tapauksessa $\psi = 0$. Tällöin tilavuusalkiosta ulos suuntautuva nettovirta aiheuttaa tiheyden pienenemisen k.o. tilavuudessa.

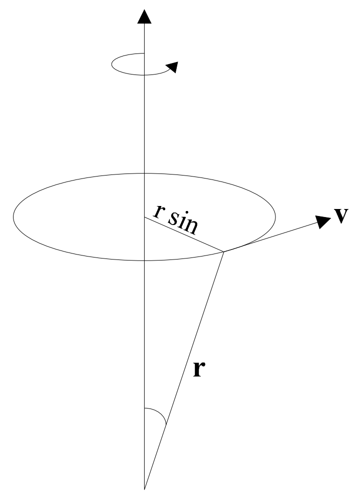
b. Roottorin fysikaalinen tulkinta ja pyörteetön vektorikenttä

Annetaan kiinteän kappaleen pyöriä vakiokulmanopeudella $\boldsymbol{\omega}$. Tällöin $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{\omega}$ ja

$$|\boldsymbol{v}| = wr \sin\theta,$$

joten

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}.$$



Kuva 2.4: Tasainen pyöriminen.

Nyt

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{v} &= \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \\
&= (\boldsymbol{r} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{r}(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \boldsymbol{r}) \\
&= -(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \boldsymbol{r}),
\end{aligned}$$

koska kulmanopeus $\boldsymbol{\omega}$ on vakio. Edelleen

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{r} &= \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\
&= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{r} &= \left(\omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial}{\partial z}\right)(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\
&= \omega_x \boldsymbol{i} + \omega_y \boldsymbol{j} + \omega_z \boldsymbol{k} = \boldsymbol{\omega},
\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{v} &= \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \\
&= -\boldsymbol{\omega} + 3\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\omega}.
\end{aligned}$$

Vakionopeudella pyörivän kiinteän kappaleen kulmanopeus on siis

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \boldsymbol{v},$$

t.s. ratanopeuden roottori on 2×kulmanopeus.

Edellä esitetyn perusteella roottorilla on ilmeisestikin jotakin tekemistä kentän pyörimisominaisuuksien kanssa. Tarkastellaan jälleen esimerkkinä nesteen virtauskenttää $\boldsymbol{F} = \rho \boldsymbol{v}$. Ajatellaan asetetuksi nesteeseen pisteeseen $\boldsymbol{r}$ siipiratas. Myöhemmin osoitetaan, että niissä pisteissä, joissa $\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \neq 0$, siipirattaalla on taipumus pyöriä, kun taas pisteissä, joissa $\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 0$ siipiratas ei pyöri. Sanotaan, että kenttä $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ on *pyörteetön* pisteessä $\boldsymbol{r}$, jos

$$\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 0.$$

Voidaan osoittaa (myöhemmin), että kentän ollessa pyörteetön kaikkialla, t.s. jos

$$\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{r},$$

niin kenttä $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ voidaan esittää skalaarifunktion gradienttina eli on olemassa funktio $\phi(\boldsymbol{r})$ siten, että

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \nabla \phi(\boldsymbol{r}).$$

Pyörteellistä kenttää kutsutaan joskus *vorteksikentäksi.*

4. Avaruuskäyrät

Avaruuskäyrä voitaisiin esittää kahden pinnan leikkausviivana. Ilmeisestikin muotoa

$$\phi(x, y, z) = C = \text{vakio}$$

oleva yhtälö kuvaa kolmiulotteisen avaruuden pintaa. Kahden pinnan leikkausviivalla on niin ollen voimassa yhtäaikaa $\phi_1(x, y, z) = C_1$ ja $\phi_2(x, y, z) = C_2$. Näistä yhtälöistä voidaan periaatteessa ratkaista kaksi muuttujaa kolmannen funktiona tai vaihtoehtoisesti kaikki kolme muuttujaa jonkin yhteisen parametrin funktiona. Kolmiulotteisessa avaruudessa olevaa käyrää kuvaa siis yhtälöjoukko

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t), \end{aligned}$$

missä t on vapaa parametri. Käyrän yhtälö voidaan kirjoittaa lyhyesti radiusvektorin avulla kuten

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}.$$

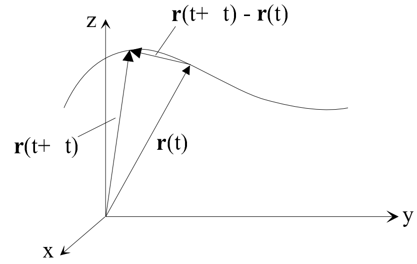
Käyrän derivaatta parametrin t suhteen on määritelmänsä mukaan

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t},$$

eli komponenteittain

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}.$$

Derivaatta $d\boldsymbol{r}(t)/dt$ on siis ilmeisestikin käyrän tangentin suuntainen.



Kuva 2.5: Derivaatan määritelmä.

Jos t tarkoittaa aikaa, niin

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} &= \boldsymbol{v}(t) = \text{nopeus} \\ \frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2} &= \boldsymbol{a}(t) = \text{kiihtyvyys.} \end{aligned}$$

Tarkastellaan käyrää C, jota esittää funktio

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u),$$

missä u on parametri, joka puolestaan voi olla jonkin toisen muuttujan funktio. Ajatellaan käyrän kaaren pituus s mitatuksi lähtien jostakin kiinteästä pisteestä. Olkoon $\boldsymbol{T}$ käyrän tangentin suuntainen yksikkövektori. Tällöin käyrällä C on ilmeisestikin voimassa

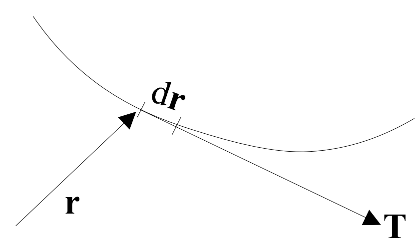
$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{T}\, ds,$$

sillä

$$|d\boldsymbol{r}| = \sqrt{dx(u)^2 + dy(u)^2 + dz(u)^2} = ds.$$

Käyrän tangentti on siis

$$\boldsymbol{T} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}.$$



Kuva 2.6: Käyrän tangentti.

Tangentin $\boldsymbol{T}$ derivaatta kaaren pituuden suhteen voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \kappa \boldsymbol{N}.$$

Tässä

$$\kappa = \left| \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \right|,$$

jonka käänteisarvo $\rho = 1/\kappa$ on nimeltään *kaarevuussäde.* Yksikkövektori $\boldsymbol{N}$ on kohtisuorassa tangenttia vastaan, sillä derivoimalla lauseke

$$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T} = 1$$

muuttujan s suhteen saadaan

$$2\boldsymbol{T} \cdot \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = 2\kappa \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{N} = 0.$$

Vektoria $\boldsymbol{N}$ sanotaan käyrän *päänormaaliksi.* Käyrän *sivunormaali* $\boldsymbol{B}$ määritellään siten, että

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}.$$

Kussakin käyrän pisteessä yksikkövektorit $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$ ja $\boldsymbol{B}$ muodostavat oikeakätisen koordinaattisysteemin. Derivoimalla normaalit kaaren pituuden suhteen saadaan, mukaan lukien päänormaalin määrittelevä kaava, n.s. *Frenet-Serret*:n kaavat

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} &= \kappa \boldsymbol{N} \\ \frac{d\boldsymbol{N}}{ds} &= \tau \boldsymbol{B} - \kappa \boldsymbol{T} \\ \frac{d\boldsymbol{B}}{ds} &= -\tau \boldsymbol{N}. \end{aligned}$$

Suure τ on nimeltään *kierteisyys* ja sen käänteisarvo $\sigma = 1/\tau$ nimeltään *kierteisyyssäde.*

Planeettojen liike

Tarkastellaan esimerkkinä avaruuskäyristä planeettojen liikettä. Ajatellaan aurinko sijoitetuksi origoon, jolloin planeetan liikerataa kuvaa radiusvektori $\boldsymbol{r}(t)$, missä parametri t tarkoittaa aikaa. Newtonin liikelain mukaan on

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = f(r)\hat{\boldsymbol{r}}, \tag{1}$$

missä $\hat{\boldsymbol{r}}$ on radiusvektorin suuntainen yksikkövektori, m planeetan massa, r planeetan etäisyys auringosta ja $f(r)$ gravitaatiovoima

$$f(r) = -\frac{GMm}{r^2}.$$

Tässä M on auringon massa ja G gravitaatiovakio.
(i) Osoitetaan, että $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}$ on vakio, kun

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

on planeetan ratanopeus. Suure $m\boldsymbol{c} = \boldsymbol{L}$ on planeetan rataimpulssimomentti.
Liikeyhtälön (1) perusteella on

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} \times \left(m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right) &= m\boldsymbol{r} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \\ &= f(r)\boldsymbol{r} \times \hat{\boldsymbol{r}} = 0, \end{aligned}$$

joten

$$\boldsymbol{r} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = 0.$$

Nyt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{r} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

eli $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ on ajasta riippumaton vakio $\boldsymbol{c}$. Edelleen, koska skalaarikolmitulon ominaisuuksien perusteella

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = 0,$$

eli $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{c}$, liike tapahtuu tasossa.
(ii) Osoitetaan, että pintanopeus eli paikkavektorin aikayksikössä pyyhkäisemä pinta-ala on vakio. Olkoon $\boldsymbol{r}$ planeetan paikka hetkellä t ja $\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}$ hetkellä $t + \Delta t$. Kun θ on vektorien $\boldsymbol{r}$ ja $\Delta\boldsymbol{r}$ välinen kulma, on näiden vektorien väliin jäävä pinta-ala

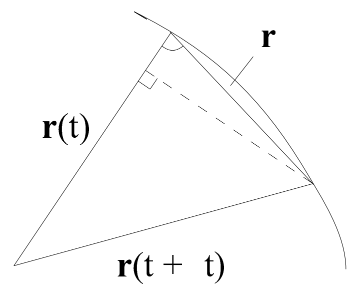
$$\Delta A = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r}||\Delta\boldsymbol{r}|\sin\theta,$$

tai vektoritulon avulla

$$\Delta A\boldsymbol{n} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r} \times \Delta\boldsymbol{r},$$

missä $\boldsymbol{n}$ on ratatasoa vastaan kohtisuorassa oleva yksikkövektori. Pintanopeus on

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t}\boldsymbol{n} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{c} = \text{vakio}. \end{aligned}$$



Kuva 2.7: Pintanopeus.

(iii) Ellipsirata
Kirjoittamalla paikkavektori muotoon $\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{r}}$ saadaan

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = r\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt} + \frac{dr}{dt}\hat{\boldsymbol{r}}.$$

Vektori $\boldsymbol{c}$ voidaan siis esittää muodossa

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c} &= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = r\hat{\boldsymbol{r}} \times \left(r\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt} + \frac{dr}{dt}\hat{\boldsymbol{r}}\right) \\ &= r^2\hat{\boldsymbol{r}} \times \frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt}. \end{aligned}$$

Koska liikeyhtälön (1) mukaan on

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}},$$

saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \times \boldsymbol{c} &= -\frac{GM}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{c} \\ &= -GM\hat{\boldsymbol{r}} \times \left(\hat{\boldsymbol{r}} \times \frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt}\right) \\ &= -GM\left[\left(\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt}\right)\hat{\boldsymbol{r}} - (\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{r}})\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt}\right]. \end{aligned}$$

Derivoimalla relaatio

$$\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} = 1$$

ajan suhteen, nähdään että

$$\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt} = 0,$$

joten

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \times \boldsymbol{c} = GM\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt}.$$

Koska $\boldsymbol{c}$ on vakio, voidaan myös kirjoittaa

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{c}) = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \times \boldsymbol{c} = GM\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt}.$$

Yhtälön molemmat puolet ovat siis joidenkin vektorifunktioiden aikaderivaattoja. Jotta yhtäsuuruus olisi voimassa, täytyy näiden funktioidenkin, vakiovektoria lukuunottamatta, olla samoja, t.s.

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{c} = GM\hat{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{p},$$

missä $\boldsymbol{p}$ ei riipu ajasta. Muodostamalla puolittain skalaaritulo radiusvektorin kanssa saadaan

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{c}) &= GM\boldsymbol{r} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p} \\ &= GMr + rp\cos\theta, \end{aligned}$$

missä θ on vektoreiden $\boldsymbol{r}$ ja $\boldsymbol{p}$ välinen kulma. Toisaalta, koska skalaarikolmitulossa voidaan tekijöitä permutoida syklisesti, on

$$\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c} = c^2.$$

Siis

$$c^2 = GMr + rp\cos\theta,$$

josta etäisyydeksi r saadaan

$$\begin{aligned} r &= \frac{c^2}{GM + p\cos\theta} = \frac{c^2/GM}{1 + p/GM\cos\theta} \\ &= \frac{a}{1 + \epsilon\cos\theta}. \end{aligned}$$

Tässä on merkitty

$$\begin{aligned} a &= \frac{c^2}{GM} = \frac{L^2}{GMm^2} \\ \epsilon &= \frac{p}{GM}. \end{aligned}$$

Yhtälö

$$r = \frac{a}{1 + \epsilon\cos\theta} \tag{2}$$

on kartioleikkauksen napakoordinaattiesitys. Vakion ϵ arvosta riippuen kyseessä on hyperbeli, paraabeli tai ellipsi.
Oletetaan, että liike tapahtuu xy-tasossa ja orientoidaan x-akseli siten, että kulma θ on radiusvektorin ja x-akselin välinen kulma. Tällöin

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta, \end{aligned}$$

ja

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Yhtälö (2) voidaan kirjoittaa muotoon

$$r = a - \epsilon r\cos\theta = a - \epsilon x.$$

Korottamalla tämä neliöön saadaan

$$x^2 + y^2 = r^2 = (a - \epsilon x)^2,$$

eli

$$(1 - \epsilon^2)x^2 + 2a\epsilon x + y^2 = a^2. \tag{3}$$

Jos $\epsilon = 1$, niin kyseessä on paraabeli

$$x = -\frac{1}{2a}y^2 + \frac{1}{2}a.$$

Oletetaan nyt, että $\epsilon \neq 1$. Täydentämällä neliöksi saadaan yhtälö (3) muotoon

$$(1 - \epsilon^2)\left(x^2 + \frac{2a\epsilon x}{1 - \epsilon^2} + \frac{a^2\epsilon^2}{(1 - \epsilon^2)^2}\right) - \frac{a^2\epsilon^2}{1 - \epsilon^2} + y^2 = a^2,$$

josta edelleen

$$(1 - \epsilon^2)\left(x + \frac{a\epsilon}{1 - \epsilon^2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{1 - \epsilon^2}.$$

Tämä saadaan kanoniseen muotoon sijoittamalla

$$x' = x + \frac{a\epsilon}{1 - \epsilon^2}$$

ja kertomalla puolittain termillä $(1 - \epsilon^2)/a^2$. Tällöin

$$\frac{(1 - \epsilon^2)^2}{a^2}x'^2 + \frac{1 - \epsilon^2}{a^2}y^2 = 1.$$

Tämä esittää ellipsiä, jos $\epsilon < 1$ ja hyperbeliä, jos $\epsilon > 1$.

Vektori-integrointi

1. Vektorifunktion integrointi parametrin suhteen

Olkoon

$$\boldsymbol{F}(u) = F_x(u)\boldsymbol{i} + F_y(u)\boldsymbol{j} + F_z(u)\boldsymbol{k}$$

parametrista u riippuva vektori. Tällöin

$$\begin{aligned}\int \boldsymbol{F}(u)\,du \quad &= \quad \boldsymbol{i}\int F_x(u)\,du + \boldsymbol{j}\int F_y(u)\,du \\ &\quad + \boldsymbol{k}\int F_z(u)\,du.\end{aligned}$$

Jos vektorikenttä $\boldsymbol{S}(u)$ toteuttaa relaation

$$\boldsymbol{F}(u) = \frac{d}{du}\boldsymbol{S}(u),$$

niin

$$\int \boldsymbol{F}(u)\,du = \boldsymbol{S}(u) + \boldsymbol{c}.$$

Vastaavasti määrätty integraali on tällöin

$$\int_a^b \boldsymbol{F}(u)\,du = \Big/_{a}^{b} \boldsymbol{S}(u) = \boldsymbol{S}(b) - \boldsymbol{S}(a).$$

2. Viivaintegraalit

Olkoon $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ vektorifunktio, joka on määritelty pisteitten A ja B välisellä käyrällä C. Oletetaan, että käyrä C on annettu parametrimuodossa

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u),$$

ja että pistettä A vastaa radiusvektori $\boldsymbol{r}(a)$ ja pistettä B radiusvektori $\boldsymbol{r}(b)$. Merkitään symbolilla $d\boldsymbol{r}$ käyrällä C laskettua differentiaalia

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\,dx + \boldsymbol{j}\,dy + \boldsymbol{k}\,dz = \frac{d\boldsymbol{r}(u)}{du}du.$$

Differentiaali $d\boldsymbol{r}$ on ilmeisestikin käyrän tangentin suuntainen. *Viivaintegraalilla* $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ tarkoitetaan tavallista yksiulotteista integraalia

$$\begin{aligned}&\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \int_C (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \\ &= \int_a^b \left(F_x\frac{\partial x(u)}{\partial u} + F_y\frac{\partial y(u)}{\partial u} + F_z\frac{\partial z(u)}{\partial u}\right) du.\end{aligned}$$

Geometrisesti viivaintegraali $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ tarkoittaa funktion $\boldsymbol{F}$ käyrän C tangentin suuntaisten projektioiden summaa.

Parametriksi u voidaan usein ottaa jokin muuttujista x, y tai z. Esimerkiksi xy-tason käyrät voidaan monesti esittää muodossa

$$y = y(x).$$

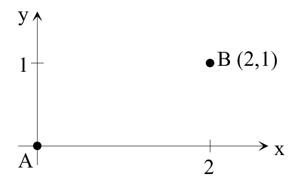
Käyrän C asemasta on monesti tapana ilmoittaa vain integroinnin päätepisteet, kuten

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Tällöin integrointitie, s.o. käyrä C, selviää asiayhteydestä tai integraali on riippumaton integrointitiestä.

Esim. Olkoon $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j}$. On laskettava $\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ pisteestä $A = (0,0)$ pisteeseen $B = (2,1)$. Nyt

$$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = (xy\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j})\cdot(dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j}) = xy\,dx - y^2 dy.$$



Kuva 3.1: Viivaintegraalin päätepisteet.

a. Olkoon integrointitienä suora

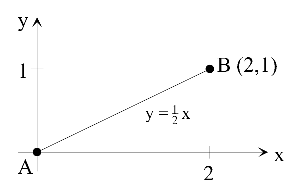
$$y = \frac{1}{2}x,$$

jolloin siis

$$dy = \frac{1}{2}dx.$$

Viivaintegraali on tällöin

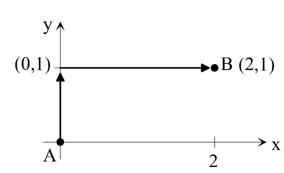
$$\begin{aligned}W_a \quad &= \quad \int_0^2 \left(x\frac{1}{2}x\,dx - \left(\frac{1}{2}x\right)^2\frac{1}{2}\,dx\right) \\ &= \quad \int_0^2 \frac{3}{8}x^2\,dx = \Big/_{0}^{2}\frac{x^3}{8} = 1.\end{aligned}$$



Kuva 3.2: Integrointitie: suora.

b. Integroidaan ensin pitkin y-akselia pisteestä $(0,0)$ pisteeseen $(0,1)$ ja sitten x-akselin suuntaisesti pisteestä $(0,1)$ pisteeseen $(2,1)$. Reitillä $(0,0)\to(0,1)$ on $x = 0$ ja $dx = 0$. Reitillä $(0,1)\to(2,1)$ on $y = 1$ ja $dy = 0$, joten

$$\begin{aligned}W_b \quad &= \quad \int_{y=0}^1 (0\cdot y\cdot 0 - y^2\,dy) + \int_{x=0}^2 (x\cdot 1\,dx - 1\cdot 0) \\ &= \quad \Big/_{0}^{1}\left(-\frac{y^3}{3}\right) + \Big/_{0}^{2}\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{3} + 2 \\ &= \quad \frac{5}{3}.\end{aligned}$$



Kuva 3.3: Integrointitie: koordinaattiakselit.

c. Integroidaan pitkin käyrää $y = (x/2)^{2/3}$. Mukavampia lausekkeita saadaan, kun esitetään käyrä parametrin $t = (x/2)^{1/3}$ avulla:

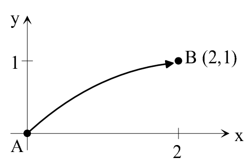
$$\begin{aligned} x &= 2t^3 \\ y &= t^2. \end{aligned}$$

Pistettä $(0, 0)$ vastaa arvo $t = 0$ ja pistettä $(2, 1)$ arvo $t = 1$. Tällä käyrällä differentiaalit dx ja dy ovat parametrin t avulla

$$\begin{aligned} dx &= 6t^2\, dt \\ dy &= 2t\, dt. \end{aligned}$$

Viivaintegraali on siis

$$\begin{aligned} W_c &= \int_0^1 (2t^3 \cdot t^2 \cdot 6t^2\, dt - t^4 \cdot 2t\, dt) \\ &= \int_0^1 (12t^7 - 2t^5) dt = \frac{12}{8} - \frac{2}{6} \\ &= \frac{7}{6}. \end{aligned}$$



Kuva 3.4: Integrointitie: käyrä.

Esimerkissämme viivaintegraalin arvo on tiestä riippuva. Jos s tarkoittaa käyrän kaaren pituutta (mitattuna jostakin pisteestä), niin

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{r})\, ds,$$

missä $\boldsymbol{T}$ on käyrän tangentin suuntainen yksikkövektori. Tällöin

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})||\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r})| \cos\theta\, ds = F(\boldsymbol{r}) \cos\theta\, ds,$$

missä θ on vektorin $\boldsymbol{F}$ ja käyrän tangentin välinen kulma. Viivaintegraali voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C F(\boldsymbol{r}) \cos\theta\, ds.$$

Tästä muodosta nähdään esimerkiksi, että $\boldsymbol{F}$:n ollessa massapisteeseen vaikuttava voima viivaintegraali tarkoittaa integroinnin alku- ja loppupisteiden välillä tehtyä työtä.

Viivaintegraaleihin liittyy tärkeä lause:

Jos vektori $\boldsymbol{F}$ voidaan esittää skalaarifunktion gradienttina,

$$\boldsymbol{F} = \nabla\phi,$$

niin $\int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ on riippumaton integrointitiestä

Tod. Skalaarin $\phi(x, y, z)$ differentiaali on

$$\begin{aligned} d\phi(x, y, z) &= \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz \\ &= \nabla\phi \cdot d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}. \end{aligned}$$

Tarkastellaan jotakin pisteitten P_1 ja P_2 välistä käyrää C. Olkoon käyrän C esitys parametrimuodossa

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t).$$

Tällä käyrällä funktio ϕ saa arvot

$$\phi(x(t), y(t), z(t)) = \psi(t)$$

ja sen differentiaali arvot

$$d\phi = d\psi(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}dt.$$

Jos parametrin arvot t_1 ja t_2 vastaavat alku- ja loppupisteitä P_1 ja P_2, niin

$$\begin{aligned} \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_C d\phi = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\psi(t)}{dt}dt \\ &= \Big/_{t_1}^{t_2} \psi(t) = \psi(t_2) - \psi(t_1) \\ &= \phi(x(t_2), y(t_2), z(t_2)) \\ &\quad -\phi(x(t_1), y(t_1), z(t_1)) \\ &= \phi(P_2) - \phi(P_1). \end{aligned}$$

Integraalin arvo riippuu siis vain päätepisteistä eikä lainkaan integrointitiestä.

Huom. Jos $\boldsymbol{F}$ on vektorifunktio, ja on olemassa skalaarifunktio ϕ siten, että

$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = d\phi,$$

niin sanotaan, että $\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ on *eksakti differentiaali.* Tällöin on mielekästä kirjoittaa

$$\int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \phi.$$

Jos $\int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ on tiestä riippumaton, sanotaan, että vektorikenttä $\boldsymbol{F}$ on *konservatiivinen.* Edellisen lauseen mukaan riittävä ehto konservatiivisuudelle on, että $\boldsymbol{F}$ on ilmaistavissa jonkin skalaarikentän gradienttina. Tämä ehto on myös välttämätön.

Tod. Oletetaan, että integraali

$$\phi(x, y, z) = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x, y, z)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

on tiestä riippumaton. Olkoon

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u}(t)$$

jokin pisteitä $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ja $P(x, y, z)$ yhdistävä käyrä. Tällöin

$$\phi(x, y, z) = \int_{P_1}^{P} \boldsymbol{F} \cdot \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}dt.$$

Käyrällä $\boldsymbol{u}(t)$ on silloin

$$\frac{d\phi}{dt} = \nabla\phi \cdot \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \frac{d\boldsymbol{u}}{dt},$$

eli

$$(\nabla\phi - \boldsymbol{F}) \cdot \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = 0.$$

Koska tämä on voimassa mielivaltaiselle käyrälle $\boldsymbol{u}(t)$, täytyy olla

$$\boldsymbol{F} = \nabla\phi.$$

Jos käyrä C on suljettu, on tapana käyttää viivaintegraalista merkintää

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Konservatiivisille kentille on voimassa

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0.$$

Voidaan osoittaa, että kenttä $\boldsymbol{F}$ on konservatiivinen, jos se on pyörteetön, eli jos

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = 0.$$

Edellisen perusteella $\boldsymbol{F}$ voidaan silloin esittää muodossa

$$\boldsymbol{F} = \nabla\phi.$$

3. Pintaintegraalit

1° **Skalaarifunktion integrointi pinnan yli**
Tarkastellaan skalaarifunktiota $\phi(x, y, z)$. Olkoon A jokin kolmiulotteisen avaruuden pinta ja dA tämän pinnan alkio. Tehtävänä on laskea

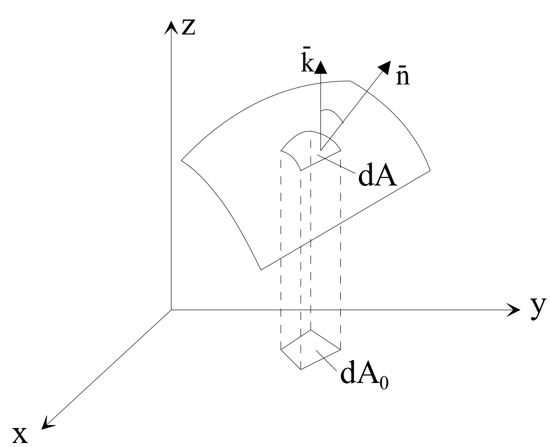
$$I = \int_A \phi(x, y, z)\, dA.$$

Olkoon $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ pisteessä $\boldsymbol{r}$ laskettu pinnan A yksikkönormaali. Pintaelementin dA projektio dA_0 esimerkiksi xy-tasolla on tällöin

$$dA_0 = dxdy = dA\, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k} = dA\, \cos\gamma,$$

joten

$$I = \int_A \phi\, dA = \iint \phi(x, y, z) \frac{dxdy}{\cos\gamma}.$$



Kuva 3.5: Pintaintegraalin johto.

Jos pinnan A yhtälö on annettu muodossa

$$\mathcal{F}(x, y, z) = C,$$

niin vektori $\nabla\mathcal{F}$ on kohtisuorassa pintaa vastaan.
Olkoon

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

jokin pinnan A piste ja $\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}$ sitä infinitesimaalisen lähellä oleva toinen pinnan A piste. Tällöin differentiaali

$$d\boldsymbol{r} = dx\, \boldsymbol{i} + dy\, \boldsymbol{j} + dz\, \boldsymbol{k}$$

on pisteestä $\boldsymbol{r}$ lähtevä pinnan tangenttitasossa oleva vektori. Pinnalla $\mathcal{F} = C$ funktion $\mathcal{F}$ differentiaali on

$$\begin{aligned} 0 &= d\mathcal{F} = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}dx + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}dy + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z}dz \\ &= \left(+\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \cdot (dx\, \boldsymbol{i} + dy\, \boldsymbol{j} + dz\, \boldsymbol{k}) \\ &= \nabla\mathcal{F} \cdot d\boldsymbol{r}. \end{aligned}$$

Koska $d\boldsymbol{r}$ on pinnan tangenttitasossa, on vektori $\nabla\mathcal{F}$ pinnan normaalin suuntainen.
Muodossa $\mathcal{F} = C$ annetun pinnan normaalin suuntainen yksikkövektori $\boldsymbol{n}$ on niin ollen

$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla\mathcal{F}}{|\nabla\mathcal{F}|}.$$

Tämän projektio z-akselille on

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k} = \cos\gamma = \frac{\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z}}{|\nabla\mathcal{F}|}.$$

Pintaintegraali I voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$I = \iint \phi(x, y, z) \frac{|\nabla\mathcal{F}|}{\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z}}\, dxdy.$$

Jos pinta A on annettu muodossa

$$z = f(x, y),$$

niin asettamalla

$$\mathcal{F} = z - f(x, y) = 0$$

saadaan

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z} = 1$$

ja

$$\frac{1}{\cos\gamma} = |\nabla\mathcal{F}| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}.$$

Tässä tapauksessa pintaintegraali I on

$$I = \iint \phi(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

Esim. Integroidaan funktio $\phi = z$ puolipallon

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2; \quad z \geq 0$$

pinnan yli.
Nyt

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = f(x, y),$$

jolloin

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 &= 1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2} \\
&= \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2} \\
&= \frac{1}{\cos^2 \gamma}.
\end{aligned}$$

Integrointialueena xy-tasossa on puolipallon pinnan projektio eli kehän

$$x^2 + y^2 = R^2 \ ; \quad z = 0$$

rajoittama ympyrä; t.s. muuttujan x saadessa arvoja $-R$:stä $+R$:ään voi muuttuja y kutakin x:n arvoa kohti saada arvot $-\sqrt{R^2 - x^2}$:sta $+\sqrt{R^2 - x^2}$:een.
Pintaintegraali on siis

$$\begin{aligned}
I &= \int_A \phi \, dA = \int_{-R}^{R} \left[\int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} z \frac{1}{\cos \gamma} \, dy \right] dx \\
&= \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \\
&\quad \left[\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right] \\
&= R \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy = 2R \int_{-R}^{R} dx \sqrt{R^2 - x^2}.
\end{aligned}$$

Tämä voidaan laskea sijoittamalla $x = R \sin t$. Tällöin $dx = R \cos t \, dt$ ja $\sqrt{R^2 - x^2} = R \cos t$, joten

$$\begin{aligned}
I &= 2R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos^2 t \, dt \\
&= 2R^3 \Big/_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \right) = \pi R^3.
\end{aligned}$$

2° **Pintaintegraalit**
Tarkastellaan pintaa A ja sillä pisteessä $P(x, yz)$ olevaa pinta-alkiota dA. Määritellään *vektoriaalinen pinta-alkio* $d\boldsymbol{A}$ siten, että

$$d\boldsymbol{A} = \boldsymbol{n} \, dA,$$

missä $\boldsymbol{n}$ on pisteessä P laskettu pinnan normaalin suuntainen yksikkövektori. Olkoon $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ jokin (integroituva) vektorikenttä. Eräs vektorikentän $\boldsymbol{F}$ pintaintegraali on

$$\iint_A \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{A} = \iint_A \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, dA.$$

Tämä on nimeltään *vektorin* $\boldsymbol{F}$ *vuo pinnan* A *läpi.*
Esim. Jos ρ on nesteen tiheys ja $\boldsymbol{v}$ sen nopeus, niin

$$\rho \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{A} = \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, dA$$

on pintaelementin dA läpi aikayksikössä kulkevan nesteen määrä. Vektorin $\boldsymbol{F} = \rho \boldsymbol{v}$ vuo pinnan A läpi, $\iint_A \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{A}$, on aikayksikössä pinnan A läpi kulkevan nesteen määrä.
Muunlaisia pintaintegraaleja ovat esim.

$$\iint_A \boldsymbol{F} \times d\boldsymbol{A} = \iint_A \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{n} \, dA; \quad \iint_A \phi \, dA; \quad \iint_A \phi \, d\boldsymbol{A}.$$

Esim. Lasketaan $I = \iint \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{A}$, kun $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, ja A on puolipallon

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2; \quad z \geq 0$$

pinta.
Nyt

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y & x & z \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{k}.$$

Pinnan A yhtälö on

$$\mathcal{F} = x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

joten

$$\nabla \mathcal{F} = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k} = 2\boldsymbol{r}.$$

Pallopinnan A yksikkönormaali $\boldsymbol{n}$ on siis

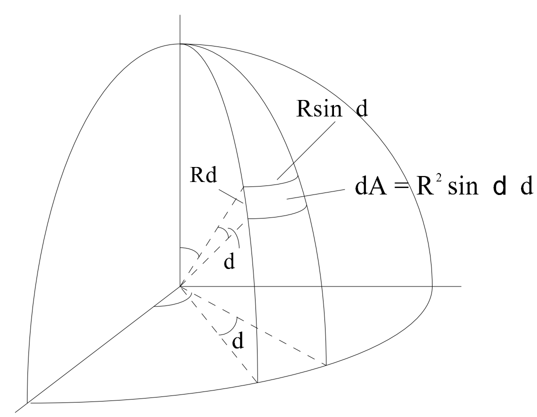
$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla \mathcal{F}}{|\nabla \mathcal{F}|} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\vec{k}}{r},$$

eli radiusvektorin suuntainen yksikkövektori.
Edelleen

$$\nabla \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n} \, dA = 2 \cos \theta \, dA,$$

missä θ on radiusvektorin ja z-akselin välinen kulma. Olkoon ϕ radiusvektorin xy-tasolla olevan projektion ja x-akselin välinen kulma. Voidaan osoittaa, että pallon pinnalla pisteessä $\boldsymbol{r}$ laskettu pintaelementti dA on

$$dA = r^2 \sin \theta \, d\theta d\phi.$$



Kuva 3.6: Pallonpintaelementti.

Puolipallon pinnalla kulmat θ ja ϕ saavat arvot

$$\begin{aligned} 0 \leq \quad & \theta \quad \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \quad & \phi \quad \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Integraali I on siis

$$\begin{aligned} I &= \iint_A \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dA \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, 2\cos\theta\, R^2 \sin\theta \\ &= 4\pi R^2 \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta\, d\theta \\ &= 4\pi R^2 \Big/_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta}{2} = 2\pi R^2. \end{aligned}$$

4. Tilavuusintegraalit

Tilavuusintegraaleissa integrointialueena on suljetun pinnan A sisään jäävä tilavuus V. Merkitään symbolilla dV tilavuusalkiota; karteesisissa koordinaateissa

$$dV = dxdydz.$$

Esimerkkejä tilavuusintegraaleista ovat

$$\iiint_V \boldsymbol{F}\, dV; \ \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dV; \iiint_V \phi\, dV.$$

Usein merkitään lyhyemmin

$$\iiint dV \longrightarrow \int dV.$$

Esim. Nesteen (massa)tiheys η muuttuu korkeuden z funktiona, kuten

$$\eta(z) = \eta_0 e^{-az}.$$

Lasketaan katkaistun kartion (ämpärin) muotoisessa astiassa olevan nesteen massa.
Olkoon astian korkeus h, pienemmän pohjaympyrän säde R_1 ja suuremman säde R_2. Asetetaan astian akseli z-akselin suuntaiseksi. Korkeudella z olevan ympyrän säde $R(z)$ on silloin

$$R(z) = R_1 + \frac{R_2 - R_1}{h} z = R_1 + kz.$$

Astiassa olevan nesteen massa M on

$$M = \iiint_V \eta(z)\, dV.$$

Merkitään symbolilla ρ pisteen $\boldsymbol{r}$ etäisyyttä z-akselista (sama kuin vektorin $\boldsymbol{r}$ xy-tason suuntaisen projektion pituus) ja olkoon ϕ vektorin $\boldsymbol{r}$ xy-tason suuntaisen projektion ja x-akselin välinen kulma. Helposti nähdään, että tilavuuselementti dV on kirjoitettavissa suureiden ρ, ϕ ja z avulla seuraavasti:

$$dV = dxdydz = \rho\, d\rho d\phi dz.$$

Muuttujan z mahdolliset arvot ovat

$$0 \leq z \leq h,$$

ja kulman ϕ arvot

$$0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

Korkeudella z etäisyys ρ voi saada arvot

$$0 \leq \rho \leq R(z).$$

Massa M on siis

$$\begin{aligned} M &= \iiint_V \eta(z)\rho\, d\rho d\phi dz \\ &= \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{R(z)} \rho\, d\rho\, \eta_0 e^{-az} \\ &= 2\pi \int_0^h \frac{1}{2} R^2(z) \eta_0 e^{-az} dz \\ &= \pi\eta_0 \int_0^h (R_1 + kz)^2 e^{-az} dz \\ &= \pi\eta_0 \Big\{ R_1^2 \int_0^h e^{-az} dz + 2kR_1 \int_0^h z e^{-az} dz \\ &\qquad + k^2 \int_0^h z^2 e^{-az} dz \Big\}. \end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned} \int_0^h z^2 e^{-az} dz &= -\Big/_{0}^{h} \frac{z^2 e^{-az}}{a} + \frac{2}{a} \int_0^h z e^{-az} dz \\ &= -\frac{h^2}{a} e^{-ah} + \frac{2}{a} \int_0^h z e^{-az} dz \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \int_0^h z e^{-az} dz &= -\Big/_{0}^{h} \frac{z e^{-az}}{a} + \frac{1}{a} \int_0^h e^{-az} dz \\ &= -\frac{h}{a} e^{-ah} - \frac{1}{a} \Big/_{0}^{h} \frac{e^{-az}}{a} \\ &= -\left\{ \frac{h}{a} + \frac{1}{a^2} \right\} e^{-ah} + \frac{1}{a^2}, \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} M &= \pi\eta_0 \Big\{ -R_1^2 \Big/_{0}^{h} \frac{e^{-az}}{a} \\ &\qquad + \big(2kR_1 + \frac{2k^2}{a}\big) \int_0^h z e^{-az} dz \\ &\qquad - k^2 \frac{h^2}{a} e^{-ah} \Big\} \\ &= \pi\eta_0 \Big\{ R_1^2 \frac{1}{a} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(2kR_1 + \frac{2k^2}{a}\right)\frac{1}{a^2}\Bigg\} \\
&+\pi\eta_0\Bigg\{ - R_1^2\frac{1}{a} \\
&-\left(2kR_1 + \frac{2k^2}{a}\right)\left(\frac{h}{a} + \frac{1}{a^2}\right) \\
&-k^2\frac{h^2}{a}\Bigg\}e^{-ah}
\end{aligned}
$$

5. Gaussin lause

Aikaisemmin nähtiin, että jos ρ on nesteen tiheys, $\boldsymbol{v}$ nesteen nopeus ja $\boldsymbol{F} = \rho\boldsymbol{v}$ virtauskenttä, niin

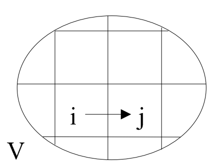
$$\nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dV = \nabla \cdot (\rho\boldsymbol{v})\, dV$$

on nesteen nettovuo tilavuudesta dV.
Ajatellaan äärellinen tilavuus V jaetuksi tilavuuselementteihin dV_i. Tällöin nettovuo tilavuudesta V on

$$\sum_i \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dV_i,$$

sillä naapurielementtien välillä kulkevat vuot kumoavat yhteisillä rajapinnoilla toisensa. Kun $dV_i \to 0$, saadaan

$$\sum_i \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dV_i \to \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dV.$$



Kuva 3.7: Tilavuusalkiot.

Toisaalta pinta-alkion $d\boldsymbol{A}$ läpi aikayksikössä kulkeva nestemäärä on

$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{A} = (\rho\boldsymbol{v}) \cdot d\boldsymbol{A}.$$

Suljetun pinnan A läpi kulkeva nettovuo on

$$\iint_A \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{A}.$$

Kun A on tilavuutta V ympäröivä pinta, niin on

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dV = \iint_A \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{A}.$$

Tämä on Gaussin lause eli *(Gaussin) divergenssilause*, joka kuuluu sanallisesti seuraavasti:
Vektorin $\boldsymbol{F}$ normaalikomponentin integraali suljetun pinnan yli on sama kuin vektorin $\boldsymbol{F}$ divergenssin integraali pinnan A sulkeman tilavuuden V yli.

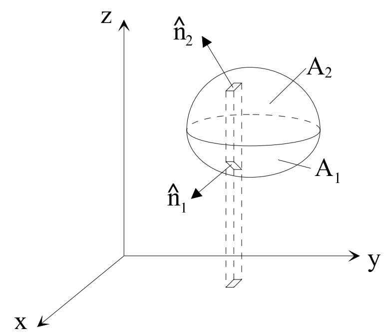
Huom. $d\boldsymbol{A}$ osoittaa ulospäin pinnan A sulkemasta tilavuudesta.

Gaussin lauseen todistus:
Kirjoitetaan vektori $\boldsymbol{F}$ komponenteittain:

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k},$$

ja tarkastellaan integraalia

$$\iiint_V \frac{\partial F_z}{\partial z}\, dV.$$



Kuva 3.8: Pinnat ja alkioiden yksikkönormaalit.

Olkoot A_1 ja A_2 tilavuutta V ympäröivän suljetun pinnan A ala- ja yläpinta, joita esittävät yhtälöt

$$
\begin{aligned}
A_1 &: \quad z = f_1(x,y) \\
A_2 &: \quad z = f_2(x,y).
\end{aligned}
$$

Olkoon R pinnan A (tai A_1 tai A_2) projektio xy-tasolla. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\iiint_V \frac{\partial F_z}{\partial z}\, dV &= \iiint_V \frac{\partial F_z}{\partial z}\, dzdxdy \\
&= \iint_R \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial F_z}{\partial z}\, dz\right] dxdy \\
&= \iint_R \left[F_z(x,y,f_2) - F_z(x,y,f_1)\right] dxdy
\end{aligned}
$$

Olkoon $\boldsymbol{n}$ pinnan A yksikkönormaali, $\boldsymbol{n}_1$ alapinnan A_1 yksikkönormaali ja $\boldsymbol{n}_2$ yläpinnan A_2 yksikkönormaali. Nyt

$$
\begin{aligned}
\text{alapinnalla:} &\qquad dxdy = -\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}_1\, dA_1 \\
\text{yläpinnalla:} &\qquad dxdy = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}_2\, dA_2 \\
\text{pinnalla:} &\qquad dxdy = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}\, dA,
\end{aligned}
$$

joten

$$
\begin{aligned}
&\iint_R \left[F_z(x,y,f_2) - F_z(x,y,f_1)\right] dxdy \\
&= \iint_{A_2} F_z\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}_2\, dA_2 + \iint_{A_1} F_z\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}_1\, dA_1 \\
&= \iint_A F_z\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}\, dA.
\end{aligned}
$$

Saamme siis

$$\iiint_V \frac{\partial F_z}{\partial z}\, dV = \iint_A F_z\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}\, dA.$$

Vastaavasti voidaan osoittaa, että

$$\iiint_V \frac{\partial F_y}{\partial y}\, dV = \iint_A F_y \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n}\, dA$$
$$\iiint_V \frac{\partial F_x}{\partial x}\, dV = \iint_A F_x \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{n}\, dA,$$

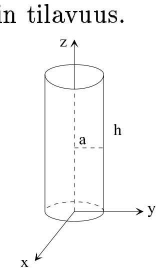
joten kaiken kaikkiaan on

$$\iiint_V \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dV$$
$$= \iint_A (F_x \boldsymbol{i} + F_y \boldsymbol{j} + F_z \boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{n}\, dA,$$

eli

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dV = \iint_A \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dA = \iint_A \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{A}.$$

Esim. Lasketaan vektorin $\boldsymbol{r}$ vuo a-säteisen ja h-korkuisen sylinterin pinnan läpi.
Olkoon A sylinteriä rajoittava pinta (mukaan lukien pohjat) ja V sylinterin tilavuus.



Kuva 3.9: Sylinteri.

a. Divergenssilauseen perusteella vuo I on

$$I = \iint_A \boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{A} = \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{r}\, dV.$$

Koska

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

on

$$\nabla \cdot \boldsymbol{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3,$$

joten

$$I = 3 \iiint_V dV = 3V = 3\pi a^2 h.$$

b. Lasketaan vuo pintaintegraalina.
(i) Yläpinnalla $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$ ja

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{k} = z = h,$$

joten

$$\iint_{\text{yläpinta}} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}\, dA = \iint h\, dA = \pi a^2 h.$$

(ii) Pohjalla $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{k}$ ja

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = -z = 0,$$

joten

$$\iint_{\text{pohja}} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}\, dA = 0.$$

(iii) Vaipalla yksikkönormaali on

$$\boldsymbol{n} = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}}{a},$$

sillä vaipan yhtälö on

$$\mathcal{F} = x^2 + y^2 = a^2,$$

ja niin ollen vektori

$$\nabla \mathcal{F} = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}$$

on kohtisuorassa vaippaa vastaan. Nyt

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{x^2 + y^2}{a} = \frac{a^2}{a} = a,$$

joten

$$\iint_{\text{vaippa}} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}\, dA = a \iint dA = a \cdot 2\pi a h.$$

Laskemalla kaikki vuot yhteen saadaan

$$I = 3\pi a^2 h.$$

Esim. Newtonin gravitaatiopotentiaali ϕ toteuttaa yhtälön

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho,$$

missä G on gravitaatiovakio ja ρ massatiheys.
Määritetään gravitaatiokenttävoimakkuus $-\nabla\phi$ pallosymmetrisessä tapauksessa.
Merkitään

$$\boldsymbol{K} = -\nabla\phi,$$

jolloin

$$\nabla \cdot \boldsymbol{K} = -\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho.$$

Jos tilavuudessa V oleva kokonaismassa on M, niin

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{K}\, dV = -4\pi G \iiint_V \rho\, dV$$
$$= -4\pi G M.$$

Toisaalta Gaussin lauseen mukaan on

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{K}\, dV = \iint_A \boldsymbol{K} \cdot d\boldsymbol{A},$$

kun A on tilavuutta V rajoittava pinta.
Oletetaan, että M-massainen kappale on pallosymmetrinen ja otetaan tilavuudeksi V k.o. kappaleen sisäänsä sulkeva r-säteinen kappalekeskinen pallo. Tällöin ilmeisestikin $|\boldsymbol{K}|$ on vakio pallon pinnalla ja $\boldsymbol{K}$ on radiusvektorin suuntainen (tai vastakkaissuuntainen), t.s. voidaan kirjoittaa

$$\boldsymbol{K} = K(r)\hat{\boldsymbol{r}},$$

missä $\hat{\boldsymbol{r}}$ on radiusvektorin suuntainen yksikkövektori. Vektori $\hat{\boldsymbol{r}}$ on tietystikin myös yksikkönormaali k.o. pallon pinnalla, joten

$$\begin{aligned}\iint\limits_{r\text{-säteinen pallo}} \boldsymbol{K}\cdot d\boldsymbol{A} &= \iint K(r)\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\,dA \\ &= K(r)\iint dA = K(r)\cdot 4\pi r^2 \\ &= -4\pi GM.\end{aligned}$$

Saamme siis tutun Newtonin gravitaatiolain

$$K(r) = -\frac{GM}{r^2},$$

tai vektoriaalisesti

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) = -\frac{GM}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}.$$

6. Stokesin lause

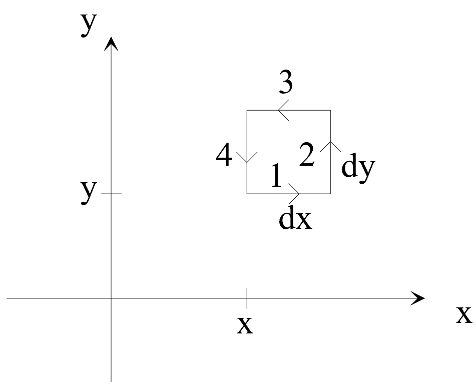
Tarkastellaan aluksi xy-tason pinta-alkiota $dA = dxdy$ ja osoitetaan, että

$$\oint_{dA\text{:n ympäri}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{A}.$$

Tässä $d\boldsymbol{A} = \boldsymbol{k}\,dA$. Lasketaan ensin pystysivut:

$$\begin{aligned}\int_{\text{sivut 2 ja 4}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_y^{y+dy}(F_y \text{ sivulla } 2)dy \\ &\quad + \int_{y+dy}^{y}(F_y \text{ sivulla } 4)dy \\ &= \int_y^{y+dy}(F_y(x+dx,y) \\ &\qquad -F_y(x,y))dy \\ &\approx \int_y^{y+dy}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}dx\right)dy \\ &\approx \frac{\partial F_y}{\partial x}dxdy.\end{aligned}$$

Tässä yhtäsuuruus tulee voimaan, kun $dx\to 0$ ja $dy\to 0$, t.s. kun $dA\to 0$.



Kuva 3.10: xy-tason pinta-alkio.

Vastaavasti vaakasivuilla saadaan

$$\int_{\text{sivut 1 ja 3}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \approx -\frac{\partial F_x}{\partial y}dxdy.$$

Siis

$$\begin{aligned}\oint \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &\approx \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)dxdy \\ &= (\nabla\times\boldsymbol{F})_z dxdy,\end{aligned}$$

tai vektoriaalisesti

$$\oint \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \approx (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{A}.$$

Tarkka muoto saadaan, kun $dA\to 0$: jos $d\boldsymbol{A} = \boldsymbol{n}\,dA$, niin

$$(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n} = \lim_{dA\to 0}\frac{1}{dA}\oint \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Tarkastellaan nyt mielivaltaista pintaa A. Jaetaan A niin pieniin palasiin ΔA_i, että niitä voidaan pitää tasopintoina. Tällöin kullakin pinnalla on voimassa

$$\boldsymbol{n}_i\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}(P_i)\,\Delta A_i \approx \oint_{C_i}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r},$$

kun P_i on jokin alueen ΔA_i piste, C_i sitä ympäröivä käyrä ja $\boldsymbol{n}_i$ sen yksikkönormaali. Summataan yli kaikkien palasten, jolloin

$$\sum_i \boldsymbol{n}_i\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}(P_i)\,\Delta A_i \approx \sum_i\oint_{C_i}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}. \qquad (1)$$

Jos C_i ja C_j ympäröivät vierekkäisiä alueita, niin yhteisellä rajalla viivaintegroinnit etenevät vastakkaisiin suuntiin ja niin ollen kumoavat toisensa. Kaiken kaikkiaan siis jää jäljelle

$$\sum_i\oint_{C_i}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r},$$

missä C on alueen A rajakäyrä. Toisaalta

$$\lim_{\Delta A_i\to 0}\sum_i \boldsymbol{n}_i\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}\,\Delta A_i \longrightarrow \iint_A(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\,dA.$$

Samalla rajalla tulee yhtälössä (1) yhtäsuuruus voimaan, joten

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_A(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{A}.$$

Tämä *Stokesin lauseen* nimellä tunnettu kaava kuuluu sanallisesti:
Vektorikentän $\boldsymbol{F}$ viivaintegraali pinnan A reunakäyrän C ympäri on sama kuin kentän $\boldsymbol{F}$ roottorin normaalikomponentin pintaintegraali pinnan A yli.

Huom. Integraalin arvo ei muutu sellaisissa integrointipinnan deformaatioissa, joissa reunakäyrä säilyy muuttumattomana.

Esim. Lasketaan $\iint_A \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{A}$, kun $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ ja A on puolipallon $x^2+y^2+z^2 = a^2; z\geq 0$ pinta.
1) Suoraan pintaintegraalina. Katso edellä (pintaintegraalit).

2) Viivaintegraalina Stokesin lausetta soveltaen. Nyt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= (-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\cdot(dx\,\boldsymbol{i}+dy\,\boldsymbol{j}+dz\,\boldsymbol{k})\\ &= -y\,dx+x\,dy+z\,dz.\end{aligned}$$

Puolipallon pinnan A reunakäyrä C on xy-tason ympyrä

$$x^2+y^2=a^2;\ z=0.$$

Tällä käyrällä

$$\begin{aligned}x &= a\cos\theta\\ y &= a\sin\theta\\ z &= 0,\end{aligned}$$

kun θ on vektorin $\boldsymbol{r}=(x,y,0)$ ja x-akselin välinen kulma. Tällöin

$$\begin{aligned}dx &= -a\sin\theta\,d\theta\\ dy &= a\cos\theta\,d\theta\\ dz &= 0,\end{aligned}$$

joten käyrällä C

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= -y\,dx+x\,dy\\ &= a^2\sin^2\theta\,d\theta+a^2\cos^2\theta\,d\theta\\ &= a^2\,d\theta.\end{aligned}$$

Stokesin lauseen mukaan on

$$\begin{aligned}\iint\limits_A(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{A} &= \oint_C\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^{2\pi}a^2\,d\theta\\ &= 2\pi a^2.\end{aligned}$$

3) Pintaintegraali on sama mille tahansa käyrän C sulkemalle pinnalle. Valitaan xy-tason ympyrä. Koska

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=2\boldsymbol{k},$$

on

$$\begin{aligned}\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{A} &= \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\,dA\\ &= 2A=2\pi a^2.\end{aligned}$$

Stokesin lauseen perusteella pyörteettömälle kentälle $\boldsymbol{F}$ on voimassa

$$\oint_C\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\iint\limits_A(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{A}=0,$$

olipa C mikä tahansa suljettu käyrä ja A sen sisäänsä sulkema pinta.
Olkoot P_a ja P_b kaksi avaruuden pistettä ja C_1 jokin pisteestä P_a pisteeseen P_b kulkeva käyrä. Jos C_2 on jokin toinen käyrä välillä $P_a\longrightarrow P_b$, niin

$$\begin{aligned}\int_{C_1}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}-\int_{C_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \oint_C\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}\\ &= 0,\end{aligned}$$

kun C on yhdistetty suljettu käyrä

$$P_a\xrightarrow[C_1]{}P_b\xrightarrow[-C_2]{}P_a.$$

Viivaintegraali

$$\int_{P_a}^{P_b}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{C_1}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{C_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

ei siis riipu lainkaan integrointitiestä, joten kenttä $\boldsymbol{F}$ on konservatiivinen. Helposti nähdään, että tämä on voimassa myös kääntäen: jos $\boldsymbol{F}$ on konservatiivinen, niin

$$\oint_C\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=0$$

olipa C mikä tahansa suljettu käyrä. Stokesin lauseen mukaan siis

$$\iint\limits_A(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{A}=0$$

on voimassa mille tahansa pinnalle.
Olkoon A mielivaltainen infinitesimaalisen pieni pinta ΔA ja $\boldsymbol{n}$ sen yksikkönormaali. Tällöin

$$0=\iint\limits_{\Delta A}(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{A}=\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F})\,\Delta A,$$

eli

$$\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F})=0,\qquad(*)$$

missä $\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F})$ lasketaan jossakin pinnan ΔA pisteessä. Annetaan nyt $\Delta A\to 0$ ja huomataan, että yhtälö $(*)$ on voimassa mielivaltaiselle suunnalle $\boldsymbol{n}$. Täytyy siis olla

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=0.$$

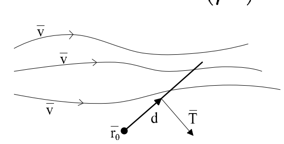
Aikaisemmat tulokset huomioiden saamme tärkeän lauseen:
Kenttä $\boldsymbol{F}$ *on konservatiivinen jos ja vain jos on olemassa skalaarifunktio* ϕ *siten, että*

$$\boldsymbol{F}=\nabla\phi.$$

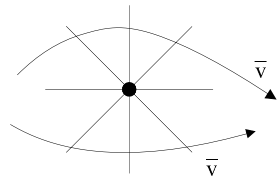
Edelleen välttämätön ja riittävä ehto kentän $\boldsymbol{F}$ *konservatiivisuudelle on, että*

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=0.$$

Esim. Nestevirtaus. Olkoon ρ nesteen tiheys ja $\boldsymbol{v}$ sen virtausnopeus. Asetetaan nesteeseen pisteeseen $\boldsymbol{r}_0$ siipiratas. Tarkastellaan rattaan yhtä lapaa ja sen yhtä pistettä $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{d}$. Jos $\boldsymbol{T}$ on tätä lapaa vastaan kohtisuorassa oleva yksikkövektori, niin ilmeisestikin k.o. pisteessä nesteen virtauksen aiheuttama vääntömomentti on verrannollinen lausekkeeseen $d(\rho\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{T}$.



Kuva 3.11: Rattaan lapa nestevirtauksessa.



Kuva 3.12: Koko ratas nestevirtauksessa.

Summaamalla yli kaikkien lapojen saadaan etäisyydellä d rattaan keskustasta virtaavan nesteen aiheuttamaksi vääntömomentiksi K

$$\begin{aligned} K &= \alpha d \sum_i (\rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{d})) \cdot \boldsymbol{T}_i \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \sum_i (\rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{d})) \cdot \boldsymbol{T}_i \, \Delta s, \end{aligned}$$

missä Δs on lapojen välinen etäisyys mitattuna pitkin d-säteisen ympyrän kaarta. Jos lapojen välimatka on pieni, niin

$$K \approx \frac{\alpha}{2\pi} \oint_{d\text{-säteinen ympyrä}} (\rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})) \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Stokesin lauseen mukaan

$$K \approx \frac{\alpha}{2\pi} \iint (\nabla \times (\rho \boldsymbol{v})) \cdot d\boldsymbol{A},$$

joten nesteen virratessa pyörteettömästi, t.s. kun $\nabla \times (\rho \boldsymbol{v}) = 0$, vääntömomentti häviää, eikä ratas pyöri.

7. Greenin lauseet

Olkoon A käyrän C rajoittama xy-tason alue, ja olkoon $\boldsymbol{F} = (M, N, 0)$. Stokesin lauseen $\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{A}$ mukaan on

$$\oint_C (M\,dx + N\,dy) = \iint_A \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy.$$

Tämä Stokesin lauseen erikoistapaus on nimeltään *Greenin lause tasossa.*

Greenin tasolauseen sovellutuksena saadaan mm. käyttökelpoisia menetelmiä suljetun käyrän rajoittaman pinta-alan laskemiseksi. Valitaan $M = 0$ ja $N = x$, jolloin

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1.$$

Greenin lauseen perusteella on

$$A = \iint dxdy = \oint_C x\,dy.$$

Valinta $M = -y/2$ ja $N = x/2$ puolestaan antaa

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1$$

ja

$$A = \iint dxdy = \frac{1}{2} \oint_C (x\,dy - y\,dx).$$

Esim. Lasketaan ellipsin

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

pinta-ala.

Ellipsi voidaan kirjoittaa parametriesityksessä, kuten

$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t, \end{aligned}$$

missä $0 \le t \le 2\pi$. Pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= \oint x\,dy = \int_0^{2\pi} a \cos t \, b \cos t \, dt \\ &= ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) \, dt \\ &= \pi ab. \end{aligned}$$

Esim. Lasketaan vektorin $\boldsymbol{F} = (x + 2y)\boldsymbol{i} + (3x - y)\boldsymbol{j}$ integraali ellipsin $C : 9x^2 + 4y^2 = 36$ ympäri.

Asetetaan Greenin lauseessa $M = x + 2y$ ja $N = 3x - y$, jolloin

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 3 - 2 = 1,$$

ja

$$\begin{aligned} I &= \oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_C (M\,dx + N\,dy) \\ &= \iint_A (3 - 2)\,dxdy = \iint_A dxdy = \pi ab. \end{aligned}$$

Ellipsin yhtälöstä nähdään, että $a = 2$ ja $b = 3$, joten

$$I = 6\pi.$$

Gaussin lauseen sovellutuksina saadaan n.s. Greenin 1. ja 2. lause. Olkoot ϕ ja ψ kaksi skalaarifunktiota. Tällöin

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi.$$

Olkoon A volyymiä V rajoittava pinta. Gaussin lauseen mukaan on

$$\begin{aligned} \iint_A \phi \nabla \psi \cdot d\boldsymbol{A} &= \iiint_V \nabla \cdot (\phi \nabla \psi)\,dV \\ &= \iiint_V \phi \nabla^2 \psi\,dV + \iiint_V \nabla \phi \cdot \nabla \psi\,dV. \end{aligned}$$

Tämä on nimeltään *Greenin 1. lause.*

Vastaavasti saadaan

$$\iint_A \psi \nabla \phi \cdot d\boldsymbol{A} = \iiint_V \psi \nabla^2 \phi\,dV + \iiint_V \nabla \psi \cdot \nabla \phi\,dV.$$

Vähentämällä y.o. yhtälöt puolittain saadaan *Greenin 2. lause*:

$$\iint_A (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\boldsymbol{A} = \iiint_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi)\,dV.$$

Kun valitaan $\phi = \psi$, saadaan 1. lauseen erikoistapauksena

$$\iint_A \phi \nabla \phi \cdot d\boldsymbol{A} = \iiint_V \left(\phi \nabla^2 \phi + (\nabla \phi)^2 \right)\,dV.$$

Jos valitaan ψ = vakio, saadaan

$$\iint_A \nabla \phi \cdot d\boldsymbol{A} = \iiint_V \nabla^2 \phi\,dV.$$

Matriisilaskentaa

1. Matriisin käsite ja nimityksiä

Matriisi on järjestetty lukujoukko, jossa kunkin luvun (alkion) paikka ilmoitetaan kahdella indeksillä: näistä ensimmäinen viittaa vaaka- ja jälkimmäinen pystyriviin. Olkoon A matriisi, jonka alkiot ovat a_{ij}. Matriisi A on tapana kirjoittaa muotoon

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Usein käytetään myös merkintöjä $A = (a_{ij})$ ja $(A)_{ij} = a_{ij}$.
Jos matriisissa A on m vaakariviä ja n pystyriviä, sanotaan, että A on $m \times n$-matriisi tai että A:n *kertaluku* on $m \times n$. Matriisin A *dimensiot* ovat m ja n.
Kaksi matriisia on yhtäsuurta, jos ja vain jos niiden dimensiot ja vastinelementit ovat samat.

- jos $n = 1$ ja $m > 1$, niin A on *pystyvektori*. Esim.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

  on 3×1-matriisi eli kolmekomponenttinen pystyvektori.

- jos $m = 1$ ja $n > 1$, niin A on *vaakavektori*. Esim. 1×3-matriisi

$$(a\ b\ c) = (a, b, c)$$

  on kolmikomponenttinen vaakavektori.

- jos $m = 1$ ja $n = 1$, on A ekvivalentti skalaarin a_{11} kanssa.

- matriisi, jonka kaikki alkiot ovat nollia, t.s. matriisi

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

  on nimeltään *nollamatriisi*.

- jos elementit a_{ij} ovat muotoa

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{jos } i \neq j \\ 1, & \text{jos } i = j, \end{cases}$$

  niin matriisi on *yksikkömatriisi*. Merkitään tätä symbolilla $\mathcal{I}$. Tällöin

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ & & & \ddots & \\ \cdots & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Joskus on hyödyllistä ajatella matriisin pysty- tai vaakarivien elementtien muodostamat jonot vektoreina; esim. $m \times n$-matriisi A voidaan ajatella muodostetuksi n:stä pystyvektorista

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

kuten

$$A = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n).$$

2. Matriisien laskusäännöt

Matriisien ominaisuuksista (esim. dimensioista) riippuen voidaan niille määritellä erilaisia laskutoimituksia. Olkoon $(A)_{ij} = a_{ij}$ ja $(B)_{ij} = b_{ij}$ matriiseja.

1° Yhteen- ja vähennyslasku
Jos matriisien A ja B dimensiot ovat samat, on niiden yhteen- ja vähennyslasku määritelty siten, että tulosmatriisin C,

$$C = A \pm B,$$

elementit $c_{ij} = (C)_{ij}$ ovat

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij},$$

eli

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

2° Kertominen vakiolla
Jokainen matriisi A voidaan kertoa vakiolla k siten, että

$$kA = (ka_{ij}),$$

t.s.

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

3° Matriisien kertolasku
Matriisien A ja B kertolasku AB on määritelty, jos A:n pystyrivien lukumäärä on sama kuin B:n vaakarivien lukumäärä. Tulomatriisin C vaakarivien lukumäärä on sama kuin A:n vaakarivien lukumäärä ja pystyrivien lukumäärä sama kuin B:n pystyrivien lukumäärä. Jos A on $m \times n$-matriisi ja B on $n \times l$-matriisi, niin $C = AB$ on siis $m \times l$-matriisi.
Matriisin C elementit $c_{ij} = (C)_{ij}$ saadaan lausekkeesta

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

eli

$$C = \begin{pmatrix} \sum_k a_{1k}b_{k1} & \sum_k a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_k a_{1k}b_{kl} \\ \sum_k a_{2k}b_{k1} & \sum_k a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_k a_{2k}b_{kl} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_k a_{mk}b_{k1} & \sum_k a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_k a_{mk}b_{kl} \end{pmatrix}.$$

Tulomatriisin ij-elementti saadaan siis siten, että vasemmanpuoleisen matriisin i:nnen vaakarivin alkiot kerrotaan oikeanpuoleisen matriisin j:nnen pystyrivin vastaavilla alkioilla ja lasketaan tulot yhteen. Esim.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

jossa esim. tulon 21-elementti on vasemmanpuoleisen matriisin toinen vaakarivi kerrottuna oikeanpuoleisen ensimmäisellä pystyrivillä eli $0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$.
Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix},$$

missä vektorit

$$a_i = (a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in})$$

ovat matriisin A vaakarivit. Olkoon

$$B = (b_1\ b_2\ \cdots\ b_l),$$

missä vektorit

$$b_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

ovat matriisin B pystyrivit. Nyt a_i on $1 \times n$-matriisi ja b_j on $n \times 1$ matriisi, joten niiden tulo on määritelty ja on 1×1-matriisi

$$\begin{aligned} a_i b_j &= (a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = c_{ij} = (AB)_{ij}. \end{aligned}$$

4° Laskulait

Olkoot A, B ja C kertaluvultaan sellaisia matriiseja, että alla olevat laskutoimitukset on määritelty. Merkitään symbolilla 0 nollamatriisia ja symbolilla $\mathcal{I}$ yksikkömatriisia. Olkoot k ja l joitakin skalaareja. Matriisien yhteenlasku tottelee lakeja:

1. $A + B = B + A$, vaihdantalaki.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$, liitäntälaki.
3. $A + 0 = A$, nolla-alkio.
4. $(k + l)A = kA + lA$, osittelulaki.
5. $k(A + B) = kA + kB$, osittelulaki.

Matriisien kertolaskulle on voimassa:

1. $A(BC) = (AB)C$, liitäntälaki.
2. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, liitäntälaki.
3. $A\mathcal{I} = \mathcal{I}A = A$, yksikköalkio.
4. $(A + B)C = AC + BC$, osittelulaki.
5. $C(A + B) = CA + CB$, osittelulaki.

Huom. Matriisien kertolasku ei yleensä toteuta vaihdantalakia, t.s. useimmiten joko

$$AB \neq BA,$$

tai toinen kertolaskuista ei ole edes määritelty.

Esim. Jos A on $m \times n$-matriisi ja B on $n \times k$-matriisi, on AB määritelty, mutta BA ei ole, ellei $k = m$.
Esim. Olkoot

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ja } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyt

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ mutta } BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

eli $AB \neq BA$.

- Jos $AB = BA$, sanotaan, että A ja B *kommutoivat.*
- Jos $AB = -BA$, sanotaan, että A ja B *antikommutoivat.*
- Suure $AB - BA$ on nimeltään A:n ja B:n *kommutaattori* ja suure $AB + BA$ on vastaavasti *antikommutaattori.* Kommutaattoreilla on tärkeä merkitys kvanttimekaniikassa.

5° Matriisin determinantti

Jos A on *neliö*matriisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

sen determinantti

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

on määritelty. Matriisin A alkiota a_{ij} vastaava *alideterminantti* $|A_{ij}|$ muodostetaan siten, että matriisista A jätetään pois i:s vaakarivi ja j:s pystyrivi, lasketaan tämän matriisin determinantti ja kerrotaan tulos tekijällä $(-1)^{i+j}$; t.s.

$$|A_{ij}| = (-1)^{i+j}\times \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Voidaan osoittaa, että

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}|A_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}|A_{ji}|,$$

eli että matriisin determinantti on jonkin vaakarivin tai jonkin pystyrivin alkioiden ja niihin liittyvien alideterminanttien tulojen summa.

Huom. 1×1 matriisin $A = (a_{11})$ determinantti on $|A| = a_{11}$.

Matriisia, jonka determinantti on nolla, sanotaan *singulaariseksi.* Jos matriisin determinantti ei ole nolla, on matriisi *ei-singulaarinen* eli *säännöllinen.*
Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &=& b_1 \\ \vdots && \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &=& b_n. \end{array}\right. \tag{1}$$

Olkoon A kertoimien a_{ij} muodostama matriisi (a_{ij}).
Olkoon x tuntemattomien x_i muodostama pystyvektori

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ja b pystyvektori

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Yhtälöryhmä (1) voidaan kirjoittaa matriisimuodossa, kuten

$$Ax = b.$$

Yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu, jos A on ei-singulaarinen, t.s. jos $|A| \neq 0$. Vastaavasti yhtälöryhmällä

$$Ax = 0$$

on ei-triviaali ratkaisu (triviaali ratkaisu on $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$), jos A on singulaarinen, t.s. jos $|A| = 0$.
Voidaan osoittaa, että matriisien tuloille on voimassa

$$|AB| = |BA| = |A||B|.$$

6° **Matriisin jälki (trace)**
Olkoon $A = (a_{ij})$ $n\times n$-neliömatriisi. Matriisin A jälki $\mathrm{tr}\,A$ on sen diagonaalielementtien summa, t.s.

$$\mathrm{tr}\,A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Olkoon $B = (b_{ij})$ samoin $n\times n$-matriisi. Nyt

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,(AB) &= \sum_{l=1}^{n}(AB)_{ll} \\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{lk}b_{kl} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} b_{kl}a_{lk} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(BA)_{kk} = \mathrm{tr}\,(BA). \end{aligned}$$

Matriisien tulon jälki ei siis muutu tulon tekijöitten syklisissä permutaatioissa:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,(A_1A_2\cdots A_n) &= \mathrm{tr}\,(A_nA_1A_2\cdots A_{n-1}) \\ &= \mathrm{tr}\,(A_{n-1}A_nA_1A_2\cdots A_{n-2}) \\ &= \cdots. \end{aligned}$$

3. Matriisimuunnoksia

Olkoon $(A)_{ij} = a_{ij}$.

- transponoitu matriisi A^T:

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}.$$

- kompleksikonjugoitu matriisi A^*:

$$(A^*)_{ij} = a^*_{ij}.$$

- Hermiten konjugoitu matriisi $A^\dagger$:

$$(A^\dagger)_{ij} = a^*_{ji},$$

  eli

$$A^\dagger = (A^*)^T = \left(A^T\right)^*.$$

- liittomatriisi eli adjungoitu matriisi $\mathrm{adj}\,A$ on A:n alideterminanttien muodostaman matriisin transponoitu matriisi:

$$(\mathrm{adj}\,A)_{ij} = |A_{ji}|,$$

  missä $|A_{ji}|$ on alkiota a_{ji} vastaava alideterminantti.

Tarkastellaan matriisia $A\,\mathrm{adj}\,A$. Tämän diagonaalielementit ovat

$$(A\,\mathrm{adj}\,A)_{ii} = \sum_{j=1}^{n}(A)_{ij}(\mathrm{adj}A)_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|A_{ij}| = |A|.$$

Olkoon nyt $i \neq j$. Tällöin

$$\begin{aligned}(A\,\mathrm{adj}\,A)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}|A_{jk}| \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.\end{aligned}$$

Determinantti on nolla, koska siinä on kaksi identtistä vaakariviä. Saamme siis

$$A\,\mathrm{adj}\,A = |A|\mathcal{I}.$$

Esim. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Liittomatriisi on

$$\mathrm{adj}\,A = \begin{pmatrix} |A_{11}| & |A_{21}| & |A_{31}| \\ |A_{12}| & |A_{22}| & |A_{32}| \\ |A_{13}| & |A_{23}| & |A_{33}| \end{pmatrix}.$$

Nyt

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 6,\ |A_{21}| = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1,$$

jne. Kaikenkaikkiaan

$$\mathrm{adj}\,A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Helposti todetaan, että

$$A\,\mathrm{adj}\,A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = -7\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Täten $det A = -7$.

- kääntеismatriisi A^{-1}: jos on olemassa matriisi C siten, että
$$CA = AC = \mathcal{I},$$
niin C on A:n käänteismatriisi, jota merkitään
$$C \equiv A^{-1}.$$

Oletetaan, että matriisilla A on käänteismatriisi. Kertomalla yhtälö

$$A\,\mathrm{adj}\,A = |A|\mathcal{I}$$

puolittain matriisilla $\frac{1}{|A|}A^{-1}$ saadaan

$$\frac{A^{-1}A\,\mathrm{adj}A}{|A|} = A^{-1}\mathcal{I},$$

eli

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\,A}{|A|}.$$

Helposti todetaan, että

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

1° **Matriisitulojen muunnoksia**

- tulon transponointi: $(AB)^T = B^TA^T$. Yleisesti: $(ABC\ldots)^T = \ldots C^TB^TA^T$.
- kompleksikonjugointi: $(AB)^* = A^*B^*$.
- Hermiten konjugointi: $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.
- käänteismatriisi: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

  Tod. Nyt
  $$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\mathcal{I}A^{-1} = \mathcal{I},$$
  joten
  $$B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}.$$

2° **Matriisityyppejä**
Matriisi A on

- symmetrinen, jos $A^T = A$ ts. $a_{ij} = a_{ji}$.
- antisymmetrinen, jos $A^T = -A$ ts. $a_{ij} = -a_{ji}$.
- ortogonaalinen, jos $A^T = A^{-1}$.
- reaalinen, jos $A^* = A$ ts. $a_{ij}^* = a_{ij}$.
- hermiittinen, jos $A^\dagger = A$ ts. $a_{ij} = a_{ji}^*$.
- unitaarinen, jos $A^\dagger = A^{-1}$.

4. Matriisikuvaukset

Olkoon A neliömatriisi ja S samaa kertalukua oleva säännöllinen matriisi. Matriisin A *kuvamatriisi* A' matriisin S määrittämässä kuvauksessa on

$$A' = S^{-1}AS.$$

Sanotaan myös, että matriisi S kuvaa matriisin A matriisiksi A'.
Lause 1. Matriisi S^{-1} kuvaa matriisin A' matriisiksi A.
Tod. Matriisin A' kuva on

$$\begin{aligned} A'' &= \left(S^{-1}\right)^{-1}A'S^{-1} = SA'S^{-1} \\ &= S\left(S^{-1}AS\right)S^{-1} = \left(SS^{-1}\right)A\left(SS^{-1}\right) \\ &= A. \end{aligned}$$

Lause 2. Matriisien väliset algebralliset yhtälöt pysyvät matriisikuvauksissa muuttumattomina eli invariantteina.

Tod. Tarkastellaan esimerkkinä relaatiota

$$ABC + D = E.$$

Olkoot yksityisten matriisien kuvat matriisin S määräämässä kuvauksessa A', B', C', D' ja E'. Nyt

$$\begin{aligned} E' &= S^{-1}ES = S^{-1}(ABC+D)S \\ &= S^{-1}(A\mathcal{I}B\mathcal{I}C)S + S^{-1}DS \\ &= S^{-1}A\left(SS^{-1}\right)B\left(SS^{-1}\right)CS + S^{-1}DS \\ &= \left(S^{-1}AS\right)\left(S^{-1}BS\right)\left(S^{-1}CS\right) + S^{-1}DS \\ &= A'B'C' + D'. \end{aligned}$$

Olkoot A ja B samaa kertalukua olevia matriiseja. Sanotaan, että B on *ekvivalentti* matriisin A kanssa, jos on olemassa säännöllinen matriisi S siten, että

$$B = S^{-1}AS.$$

Lauseen 1 perusteella ekvivalenttisuus on refleksiivinen relaatio; t.s. jos B on ekvivalentti A:n kanssa, niin myös A on ekvivalentti B:n kanssa (matriisi S^{-1} välittää k.o. kuvauksen).

Huom. Kaikki $n \times n$-matriisit eivät ole keskenään ekvivalentteja. Esim. yksikkömatriisin $\mathcal{I}$ ekvivalenssiluokkaan kuuluu vain $\mathcal{I}$, sillä

$$S^{-1}\mathcal{I}S = S^{-1}S = \mathcal{I}.$$

Ekvivalenteilla matriiseilla on sama determinantti ja jälki, sillä

$$\begin{aligned} |S^{-1}AS| &= |SS^{-1}A| = |\mathcal{I}A| = |A| \\ \operatorname{tr}\left(S^{-1}AS\right) &= \operatorname{tr}\left(SS^{-1}A\right) = \operatorname{tr}(\mathcal{I}A) = \operatorname{tr} A. \end{aligned}$$

5. Matriisin diagonalisointi, ominaisarvot ja ominaisvektorit

Mikäli matriisin A kuvamatriisien joukossa on diagonaalinen matriisi Λ, t.s. on olemassa säännöllinen matriisi S siten, että

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & & \\ 0 & \lambda_2 & 0\cdots & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = S^{-1}AS,$$

sanotaan, että A on *diagonalisoituva*. Tällöin

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

ja

$$A^2 = \left(S\Lambda S^{-1}\right)\left(S\Lambda S^{-1}\right) = S\Lambda^2 S^{-1}.$$

Helposti nähdään, että yleisesti on voimassa

$$A^n = S\Lambda^n S^{-1}. \qquad (*)$$

Olkoon nyt $f(\lambda)$ jokin skalaarimuuttujan funktio. Oletetaan, että f on kirjoitettavissa Taylorin sarjaksi

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n.$$

Määritellään matriisimuuttujan funktio $f(A)$ siten, että

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n.$$

Ominaisuuden $(*)$ perusteella on

$$f(A) = \sum_n c_n S\Lambda^n S^{-1} = S\left(\sum_n c_n \Lambda^n\right)S^{-1}$$

eli

$$f(A) = Sf(\Lambda)S^{-1}.$$

Olkoon Λ diagonaalinen matriisi

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \operatorname{Diag}(\lambda_i).$$

Diagonaalimatriisilla on m.m. ominaisuudet

- $\Lambda^2 = \operatorname{Diag}(\lambda_i^2)$.
- $\Lambda^n = \operatorname{Diag}(\lambda_i^n)$, kun n on kokonaisluku.
- $\Lambda^{-1} = \operatorname{Diag}(1/\lambda_i)$.
- $\Lambda^{-n} = \left(\Lambda^{-1}\right)^n = \operatorname{Diag}\left(\lambda_i^{-n}\right)$.
- $\Lambda^{1/2} = \operatorname{Diag}(\sqrt{\lambda_i})$.

Matriisiargumenttinen funktio $f(A)$ voidaan siis määritellä siten, että

$$\begin{aligned} f(A) &= S\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}S^{-1} \\ &= S\operatorname{Diag}\left(f(\lambda_i)\right)S^{-1} = Sf(\Lambda)S^{-1}, \end{aligned}$$

kun Λ on matriisin A diagonaalinen kuvamatriisi. Olkoon A neliömatriisi. Pystyvektoria $x \neq 0$, joka toteuttaa yhtälöryhmän

$$Ax = \lambda x, \qquad (\dagger)$$

sanotaan matriisin A *ominaisvektoriksi* ja skalaaria λ matriisin A *ominaisarvoksi.* Olkoon $\Lambda = \operatorname{Diag}(\lambda_i)$ matriisin A diagonaalinen kuvamatriisi, t.s.

$$\Lambda = S^{-1}AS.$$

Kertomalla ominaisarvoyhtälö (†) matriisilla S^{-1} saadaan

$$S^{-1}Ax = S^{-1}A\mathcal{I}x = S^{-1}ASS^{-1}x = \Lambda S^{-1}x = \lambda S^{-1}x.$$

Kun merkitään symbolilla y pystyvektoria

$$y = S^{-1}x,$$

voidaan kirjoittaa

$$\Lambda y = \mathrm{Diag}(\lambda_i)y = \lambda y,$$

tai komponenteittain

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jos nyt λ on eri suuri kuin mikään elementeistä λ_i eli

$$\lambda_i - \lambda \neq 0, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

niin yhtälöryhmällä on ainoastaan triviaali ratkaisu

$$y_1 = y_2 = y_3 = \cdots = y_n = 0.$$

Ei-triviaali ratkaisu on siis olemassa, jos ja vain jos ominaisarvo λ on jokin diagonaalielementeistä λ_i.
Saamme lauseen:
Matriisin A ominaisarvot ovat sen diagonaalisen kuvamatriisin alkiot λ_i.
Ominaisarvot voidaan ratkaista myös suoraan tarkastelemalla yhtälöä (†):

$$Ax = \lambda x.$$

Tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$(A - \lambda\mathcal{I})x = 0,$$

tai eksplisiittisesti yhtälöryhmäksi

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\ & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n & = 0. \end{cases}$$

Tälläisella homogeenisella yhtälöryhmällä on ei-triviaali ratkaisu, jos ja vain jos kerroindeterminantti on nolla, t.s. jos ja vain jos

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Kompaktimmin tämä *sekulaariyhtälönä* tunnettu ehto voidaan kirjoittaa muotoon

$$\det(A - \lambda\mathcal{I}) = 0.$$

Kerroindeterminantti on selvästikin suureen λ n:nnen asteen polynomi, jolla on siten n juurta.
Sekulaariyhtälön $\det(A - \lambda\mathcal{I}) = 0$ ratkaisuna,

$$\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n,$$

saadaan siis n kpl matriisin A ominaisarvoja.
Kun ominaisarvot on löydetty, vastaavat ominaisvektorit saadaan ratkaisemalla homogeeninen lineaarinen yhtälöryhmä: jos λ_i on jokin ominaisarvo, niin sitä vastaava ominaisvektori x_i on yhtälöryhmän

$$Ax_i = \lambda_i x_i$$

jokin ei-triviaali ratkaisu.
Ominaisvektorit eivät määräydy yksikäsitteisesti. Jos nimittäin x_i on ominaisvektori, t.s. $Ax_i = \lambda_i x_i$, ja α on jokin skalaari, niin

$$A(\alpha x_i) = \alpha(Ax_i) = \alpha(\lambda_i x_i) = \lambda_i(\alpha x_i),$$

eli myös αx_i on ominaisvektori.
Esim. Määritetään matriisin $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit.
Sekulaariyhtälö on nyt

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda\mathcal{I}) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0. \end{aligned}$$

Tämän ratkaisuna saadaan ominaisarvoiksi

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+8}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

Ratkaistaan ominaisvektorit yhtälöryhmästä

$$Ax_i = \lambda_i x_i; \ i = 1, 2,$$

eli

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_i & 2 \\ 3 & 4-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Saadaan siis kahden yhtälön ryhmä

$$\begin{cases} (1-\lambda_i)x + 2y & = 0; \qquad x = \frac{2}{\lambda_i - 1}y \\ 3x + (4-\lambda_i)y & = 0; \qquad x = \frac{\lambda_i - 4}{3}y. \end{cases}$$

Komponentin y arvoksi voidaan ottaa mikä tahansa nollasta poikkeava luku.
$\underline{\lambda = \lambda_1}$
Nyt

$$\begin{aligned} \lambda_1 - 1 &= \frac{3+\sqrt{33}}{2} \\ \lambda_1 - 4 &= \frac{-3+\sqrt{33}}{2} \end{aligned}$$

joten

$$x = \frac{4}{3+\sqrt{33}}y$$

tai

$$x = \frac{-3+\sqrt{33}}{6} y.$$

Merkitsemällä määräämätöntä y:n arvoa symbolilla α, saadaan

$$x_1 = \alpha \begin{pmatrix} \frac{4}{3+\sqrt{33}} \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{-3+\sqrt{33}}{6} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\underline{\lambda = \lambda_2}$

Nyt

$$x = \frac{4}{3-\sqrt{33}} y$$

tai

$$x = -\frac{3+\sqrt{33}}{6} y,$$

joten

$$x_2 = \beta \begin{pmatrix} \frac{4}{3-\sqrt{33}} \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -\frac{3+\sqrt{33}}{6} \\ 1 \end{pmatrix},$$

missä β on jokin skalaariluku.

Ominaisvektorien normitus

Jos ominaisvektori kerrotaan skalaarilla, se on edelleen ominaisvektori. Siksi on usein tapana *normittaa* ominaisvektorit yksikön mittaisiksi: jos x toteuttaa yhtälön

$$Ax = \lambda x,$$

niin ominaisarvoa λ vastaava normitettu ominaisvektori $\hat{x}$ on

$$\hat{x} = \frac{1}{|x|} x.$$

Tässä vektorin x pituudella (normilla) $|x|$ tarkoitetaan euklidista pituutta

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x^T x},$$

jos x on reaalikomponenttinen vektori. Yleisesti

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^* x_i} = \sqrt{x^\dagger x}.$$

Esim. Edellisessä esimerkissä saatiin erääksi ominaisvektoriksi

$$x_1 = \alpha \begin{pmatrix} \frac{4}{3+\sqrt{33}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nyt

$$\begin{aligned} |x_1| &= \alpha \sqrt{\left(\frac{4}{3+\sqrt{33}}\right)^2 + 1^2} \\ &= \alpha \frac{\sqrt{4^2 + 3^2 + 33 + 6\sqrt{33}}}{3+\sqrt{33}} \\ &= \alpha \frac{\sqrt{58 + 6\sqrt{33}}}{3+\sqrt{33}}, \end{aligned}$$

joten normitettu ominaisvektori on

$$\hat{x}_1 = \frac{1}{|x_1|} x_1 = \frac{3+\sqrt{33}}{\sqrt{58+6\sqrt{33}}} \begin{pmatrix} \frac{4}{3+\sqrt{33}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Summasääntöjä

Olkoon Λ matriisin A diagonaalinen kuvamatriisi, t.s.

$$\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_i) = S^{-1} A S.$$

Diagonaalielementit λ_i ovat matriisin A ominaisarvot. Determinantin ja jäljen ominaisuuksien perusteella on

$$\begin{aligned} \det \Lambda &= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A \\ \mathrm{tr}\,\Lambda &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}\,A. \end{aligned}$$

Jälkimmäisestä ominaisuudesta saadaan yleistäen *summasääntö*

$$\mathrm{tr}\,A^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k,$$

sillä

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,A^k &= \mathrm{tr}\,(S^{-1} A^k S) \\ &= \mathrm{tr}\,(S^{-1} A S S^{-1} A \cdots A S S^{-1} A S) \\ &= \mathrm{tr}\,(\Lambda^k). \end{aligned}$$

Näitä ominaisuuksia voidaan joskus käyttää hyväksi ominaisarvoja laskettaessa.

Esim. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Nyt

$$\mathrm{tr}\,A = 5 = \lambda_1 + \lambda_2,$$

joten

$$\det A = -2 = \lambda_1 \lambda_2 = \lambda_1 (5 - \lambda_1).$$

Saamme siis toisen asteen yhtälön

$$\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0,$$

jonka ratkaisut ovat

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$$

kuten ennenkin.

Diagonalisoiva matriisi

Olkoot vektorit x_i ominaisarvoon λ_i liittyvät matriisin A ominaisvektorit, t.s.

$$A x_i = \lambda_i x_i.$$

Kirjoitetaan vektori x_i komponenteittain, kuten

$$x_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}.$$

Tarkastellaan matriisia

$$U = (x_1, x_2, \dots x_n) = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} AU &= (Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n) \\ &= (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n) = U\Lambda. \end{aligned}$$

Kertomalla vasemmalta matriisilla U^{-1} (voidaan osoittaa, että U on ei-singulaarinen) saadaan

$$\Lambda = U^{-1}AU,$$

t.s. *ominaisvektorien muodostama matriisi diagonalisoi A:n.*

1° **Hermiittisen ja unitaarisen matriisin ominaisarvot ja ominaisvektorit**

Tarkastellaan hermiittistä matriisia H, t.s.

$$H^\dagger = (H^*)^T = H.$$

Olkoot x ja y matriisin H ominaisvektoreita. Kerrotaan vastaavat ominaisarvoyhtälöt

$$\begin{aligned} Hx &= \lambda_1 x \\ Hy &= \lambda_2 y \end{aligned}$$

vasemmalta vektoreilla $y^\dagger$ ja $x^\dagger$. Tällöin

$$\begin{aligned} y^\dagger Hx &= \lambda_1 y^\dagger x \\ x^\dagger Hy &= \lambda_2 x^\dagger y. \end{aligned}$$

Nyt

$$\left(y^\dagger Hx\right)^\dagger = x^\dagger H^\dagger y = x^\dagger Hy$$

ja

$$\left(\lambda_1 y^\dagger x\right)^\dagger = \lambda_1^* x^\dagger y,$$

joten

$$\begin{aligned} x^\dagger Hy &= \lambda_1^* x^\dagger y \\ x^\dagger Hy &= \lambda_2 x^\dagger y. \end{aligned}$$

Vähentämällä nämä puolittain saadaan

$$(\lambda_1^* - \lambda_2)x^\dagger y = 0.$$

Jos valitaan $x = y$, jolloin $\lambda_1 = \lambda_2$, saadaan

$$(\lambda_1^* - \lambda_1)x^\dagger x = 0.$$

Nyt

$$\begin{aligned} x^\dagger x &= (x_1^* \; x_2^* \; \dots \; x_n^*) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= x_1^* x_1 + x_2^* x_2 + \dots + x_n^* x_n > 0, \end{aligned}$$

joten täytyy olla

$$\lambda_1^* = \lambda_1$$

eli λ_1 on reaalinen.
Jos toisaalta valitaan $x \neq y$ ja $\lambda_1 \neq \lambda_2$, niin

$$x^\dagger y = 0,$$

eli ominaisvektorit ovat *ortogonaaliset.* Saamme siis lauseen
Hermiittisen matriisin ominaisarvot ovat reaaliset ja ominaisvektorit ortogonaaliset.
Olkoon U unitaarinen matriisi, t.s.

$$U^\dagger = U^{-1}.$$

Olkoot x ja y matriisin U ominaisarvoihin λ_1 ja λ_2 liittyvät ominaisvektorit. Ensimmäisen ominaisarvoyhtälön

$$\begin{aligned} Ux &= \lambda_1 x \\ Uy &= \lambda_2 y \end{aligned}$$

Hermiten konjugointi antaa

$$(Ux)^\dagger = x^\dagger U^\dagger = x^\dagger U^{-1} = \lambda_1^* x^\dagger.$$

Kerrotaan tämä oikealta vektorilla Uy, jolloin

$$\begin{aligned} (Ux)^\dagger Uy &= x^\dagger U^\dagger Uy = x^\dagger y \\ &= \lambda_1^* \lambda_2 x^\dagger y, \end{aligned}$$

eli

$$(1 - \lambda_1^* \lambda_2)x^\dagger y = 0.$$

Jos $x = y$, jolloin $\lambda_1 = \lambda_2$, niin

$$|\lambda_1|^2 = 1,$$

eli ominaisarvot ovat muotoa

$$\lambda_1 = e^{i\phi_1}; \; \phi_1 \in \mathcal{R}.$$

Jos taas $x \neq y$ ja $\lambda_1 \neq \lambda_2$, niin

$$\lambda_1^* \lambda_2 = e^{i(\phi_2 - \phi_1)} \neq 1,$$

joten

$$x^\dagger y = 0.$$

Saamme lauseen
Unitaarisen matriisin ominaisarvot ovat itseisarvoltaan ykkösen suuruisia ja eri ominaisarvoihin kuuluvat ominaisvektorit ortogonaalisia.
Tarkastellaan hermiittistä $n \times n$-matriisia H. Olkoot tämän *normitetut* ominaisvektorit $x_1, x_2, \dots, x_n$, t.s.

$$Hx_i = \lambda_i x_i,$$

missä λ_i on reaalinen ominaisarvo. Komponenteittain vektorit x_i ovat

$$x_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}.$$

Muodostetaan matriisi

$$U = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n) = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Nyt

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} x_{11}^* & \cdots & x_{n1}^* \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n}^* & \cdots & x_{nn}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^\dagger \\ \vdots \\ x_n^\dagger \end{pmatrix},$$

joten

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= \begin{pmatrix} x_1^\dagger \\ \vdots \\ x_n^\dagger \end{pmatrix} (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n) \\ &= \begin{pmatrix} x_1^\dagger x_1 & \cdots & x_1^\dagger x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^\dagger x_1 & \cdots & x_n^\dagger x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{I}, \end{aligned}$$

sillä vektorit x_i ovat hermiittisen matriisin ominaisvektoreina ortogonaalisia. Matriisi U on siis unitaarinen.
Kertomalla U matriisilla H saadaan

$$\begin{aligned} HU &= H(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n) = (Hx_1\ Hx_2\ \cdots\ Hx_n) \\ &= (\lambda_1 x_1\ \lambda_2 x_2\ \cdots\ \lambda_n x_n) \end{aligned}$$

ja edelleen

$$\begin{aligned} U^{-1}HU &= U^\dagger HU = \begin{pmatrix} x_1^\dagger \\ \vdots \\ x_n^\dagger \end{pmatrix} (\lambda_1 x_1\ \cdots\ \lambda_n x_n) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1^\dagger x_1 & \cdots & \lambda_n x_1^\dagger x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 x_n^\dagger x_1 & \cdots & \lambda_n x_n^\dagger x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda, \end{aligned}$$

missä $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_i)$ on matriisin H ominaisarvojen muodostama diagonaalinen matriisi. Olemme siis todistaneet lauseen
Hermiittinen matriisi H voidaan diagonalisoida unitaarisella muunnoksella, joka muodostuu H:n normitetuista ominaisvektoreista.

Huom. Koska symmetrinen ja ortogonaalinen matriisi ovat hermiittisen ja unitaarisen matriisin erikoistapauksia, edellä esitetyt lauseet ovat voimassa myös näille. Symmetrisen matriisin tapauksessa myös ominaisvektorit ovat reaalisia.

2° Lineaariset kuvaukset

Tarkastellaan n-ulotteista avaruutta $\mathcal{K}^n$, missä $\mathcal{K}^n$ on joko reaalinen avaruus $\mathcal{R}^n$ tai kompleksinen avaruus $\mathcal{C}^n$.

Olkoon T kuvaus avaruudesta $\mathcal{K}^n$ avaruuteen $\mathcal{K}^m$.
Merkitään tätä

$$T : \mathcal{K}^n \mapsto \mathcal{K}^m.$$

Olkoon x avaruuden $\mathcal{K}^n$ vektori, joka komponenteittain kirjoitettuna on

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

missä $x_i \in \mathcal{K}$. Kuvauksessa T vektori x kuvautuu avaruuden $\mathcal{K}^m$ vektoriksi $T(x) \equiv Tx$.
Olkoot nyt x_1 ja x_2 avaruuden $\mathcal{K}^n$ vektoreita ja α_1 ja α_2 lukukuntaan $\mathcal{K}$ kuuluvia skalaareja. Kuvaus T on lineaarinen, jos ja vain jos

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2.$$

Aivan ilmeisesti jokainen $m \times n$-matriisi $A \in \mathcal{K}^{m\times n}$ on lineaarinen kuvaus avaruudesta $\mathcal{K}^n$ avaruuteen $\mathcal{K}^m$.
Tämä on voimassa myös kääntäen: jokaista lineaarista kuvausta $T : \mathcal{K}^n \mapsto \mathcal{K}^m$ vastaa $m \times n$-matriisi.
Olkoot $e_1, e_2, \ldots e_n$ avaruuden $\mathcal{K}^n$ jokin kantavektorijoukko (ei välttämättä ortogonaalinen), t.s. jokainen vektori $x \in \mathcal{K}^n$ voidaan esittää muodossa

$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots a_n e_n,$$

missä suureet $a_i \in \mathcal{K}$ ovat vektorin x *koordinaatit* koordinaatistossa $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.
Tarkastellaan lineaarista kuvausta (matriisia) $M : \mathcal{K}^n \mapsto \mathcal{K}^n$. Oletetaan, että matriisi M on säännöllinen. Tässä kuvauksessa kantavektorit e_i kuvautuvat vektoreiksi

$$e_i' = M e_i.$$

Koska M oletettiin säännölliseksi, voidaan osoittaa, että myös vektorit e_i' ovat avaruuden $\mathcal{K}^n$ kantavektoreita. Mielivaltaiselle vektorille x on siis voimassa

$$\begin{aligned} x &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n \\ &= a_1' e_1' + a_2' e_2' + \cdots + a_n' e_n' \\ &= a_1' M e_1 + a_2' M e_2 + \cdots + a_n' M e_n, \end{aligned}$$

missä a_i' ovat vektorin x koordinaatit koordinaatistossa $\{e_1', e_2', \ldots, e_n'\}$. Säännöllinen kuvaus M voidaan siten ajatella *koordinaatiston muunnokseksi.*

Käyräviivaiset koordinaatistot

Tarkastellaan kolmiulotteista avaruutta $\mathcal{R}^3$. Oletetaan, että avaruuden jokainen piste (x, y, z) voidaan kirjoittaa kolmen muuttujan (u_1, u_2, u_3) funktiona siten, että

$$\begin{aligned} x &= x(u_1, u_2, u_3) \\ y &= y(u_1, u_2, u_3) \\ z &= z(u_1, u_2, u_3). \end{aligned}$$

Oletetaan edelleen, että näistä yhtälöistä voidaan muuttujat u_1, u_2 ja u_3 ratkaista koordinaattien x, y ja z funktiona:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x, y, z) \\ u_2 &= u_2(x, y, z) \\ u_3 &= u_3(x, y, z). \end{aligned}$$

Näissä kuvauksissa esiintyvät funktiot oletetaan yksikäsitteisiksi ja niiden derivaatat jatkuviksi, jolloin kolmikkojen (x, y, z) ja (u_1, u_2, u_3) vastaavuus on yksikäsitteinen.
Jos pisteen P karteesiset koordinaatit ovat (x, y, z), niin edellisen perusteella voimme ilmaista nämä myös yksikäsitteisesti *käyräviivaisten koordinaattien* (u_1, u_2, u_3) avulla.

1. Yksikkövektorit käyräviivaisissa koordinaatistoissa

Olkoot c_1, c_2 ja c_3 vakioita. Pinnat $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$ ja $u_3 = c_3$ ovat nimeltään *koordinaattipintoja*. Kahden pinnan leikkauskäyrää sanotaan *koordinaattikäyräksi* tai *koordinaattiviivaksi*. Koordinaattikäyrällä kaksi muuta koordinaattia ovat vakioita: esim. pintojen $u_2 = c_2$ ja $u_3 = c_3$ leikkaus on koordinaattikäyrä u_1. Jos koordinaattipinnat leikkaavat toisensa kohtisuorasti, käyräviivaista koordinaattisysteemiä sanotaan *suorakulmaiseksi* tai *ortogonaaliseksi*.
Esim. Sylinterikoordinaatisto. Karteesiset koordinaatit (x, y, z) ilmaistaan sylinterikoordinaattien (ρ, ϕ, z) avulla kuten

$$x = \rho\cos\phi,\ \ y = \rho\sin\phi,\ \ z = z,$$

missä

$$\rho \geq 0,\ \ 0 \leq \phi < 2\pi,\ \ -\infty < z < \infty.$$

Koordinaattipinnat ovat

- $\rho = c_1$: z-akselikeskeiset sylinterit.
- $\phi = c_2$: z-akselin kautta kulkevat tasot.
- $z = c_3$: xy-tason suuntaiset tasot.

Koordinaattikäyrät ovat

- z-käyrä: pintojen $\rho = c_1$ ja $\phi = c_2$ leikkaus on z-akselin suuntainen suora.
- ϕ-käyrä: pintojen $\rho = c_1$ ja $z = c_3$ leikkaus z-akselikeskeinen ympyrä.
- ρ-käyrä: pintojen $\phi = c_2$ ja $z = c_3$ leikkaus on xy-tason suuntainen suora.

Olkoon $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ pisteen P paikkavektori. Edellisen perusteella voidaan kirjoittaa

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u_1, u_2, u_3).$$

Pisteen P kautta kulkeva u_1-koordinaattikäyrä on muotoa

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u_1, u_2 = \text{vakio}, u_3 = \text{vakio}),$$

jonka tangentti pisteessä P on vektorin $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}$ suuntainen. Yksikkötangenttivektori $\boldsymbol{e}_1$ on siis

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1},$$

missä

$$h_1 = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\right|$$

on n.s. *skaalaustekijä*. Vastaavasti u_2- ja u_3-koordinaattikäyrien yksikkötangenttivektorit ovat

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} \text{ ja } \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3},$$

missä skaalaustekijät ovat

$$h_2 = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\right| \text{ ja } h_3 = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}\right|.$$

2. Ortogonaaliset koordinaatistot

Voidaan osoittaa, että yksikkötangentit $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ja $\boldsymbol{e}_3$ ovat lineaarisesti riippumattomia, t.s. jokainen vektori $\boldsymbol{A}$ voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa

$$\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3.$$

Tässä A_1, A_2 ja A_3 ovat vektorin $\boldsymbol{A}$ *komponentit* koordinaattisysteemissä $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Yleisessä tapauksessa $A_i \neq \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_i$, sillä tangentit eivät välttämättä ole kohtisuorassa toisiaan vastaan, t.s. $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j \neq 0$ kun $i \neq j$. Kun koordinaatisto (u_1, u_2, u_3) on ortogonaalinen, niin koordinaattikäyrät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Tällöin siis myös tangenttivektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, eli

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij},$$

ja vektorin $\boldsymbol{A}$ komponentit ovat

$$A_i = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_i.$$

Esim. Sylinterikoordinaatisto. Paikkavektori $\boldsymbol{r}$ voidaan kirjoittaa sylinterikoordinaattien avulla kuten

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \\ &= \rho\cos\phi\boldsymbol{i} + \rho\sin\phi\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

ρ-, ϕ- ja z-koordinaattikäyrien tangentit ovat

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho} &= \cos\phi\boldsymbol{i} + \sin\phi\boldsymbol{j} \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} &= -\rho\sin\phi\boldsymbol{i} + \rho\cos\phi\boldsymbol{j} \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} &= \boldsymbol{k}, \end{aligned}$$

jolloin skaalaustekijät ovat

$$\begin{aligned} h_\rho &= \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho}\right| = \sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = 1 \\ h_\phi &= \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\right| = \rho\sqrt{\sin^2\phi + \cos^2\phi} = \rho \\ h_z &= \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\right| = 1. \end{aligned}$$

Yksikkötangentit ovat siis

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{e}_\rho = \frac{1}{h_\rho}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho} = \cos\phi\boldsymbol{i} + \sin\phi\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{e}_\phi = \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = -\sin\phi\boldsymbol{i} + \cos\phi\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{e}_3 &= \boldsymbol{e}_z = \frac{1}{h_z}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = \boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 &= (\cos\phi\boldsymbol{i} + \sin\phi\boldsymbol{j}) \cdot (-\sin\phi\boldsymbol{i} + \cos\phi\boldsymbol{j}) = 0 \\ \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 &= (\cos\phi\boldsymbol{i} + \sin\phi\boldsymbol{j}) \cdot \boldsymbol{k} = 0 \\ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 &= (-\sin\phi\boldsymbol{i} + \cos\phi\boldsymbol{j}) \cdot \boldsymbol{k} = 0, \end{aligned}$$

joten sylinterikoordinaatisto on suorakulmainen.
Yllä olevista yksikkötangenttien lausekkeista voidaan ratkaista karteesisen koordinaatiston yksikkövektorit $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ ja $\boldsymbol{k}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i} &= \cos\phi\boldsymbol{e}_\rho - \sin\phi\boldsymbol{e}_\phi \\ \boldsymbol{j} &= \sin\phi\boldsymbol{e}_\rho + \cos\phi\boldsymbol{e}_\phi \\ \boldsymbol{k} &= \boldsymbol{e}_z. \end{aligned}$$

Esitetään vektori $\boldsymbol{A} = z\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ sylinterikoordinaateissa. Nyt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= z\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k} \\ &= z(\cos\phi\boldsymbol{e}_\rho - \sin\phi\boldsymbol{e}_\phi) \\ &\quad -2\rho\cos\phi(\sin\phi\boldsymbol{e}_\rho + \cos\phi\boldsymbol{e}_\phi) \\ &\quad +\rho\sin\phi\boldsymbol{e}_z \\ &= (z\cos\phi - 2\rho\cos\phi\sin\phi)\boldsymbol{e}_\rho \\ &\quad -(z\sin\phi + 2\rho\cos^2\phi)\boldsymbol{e}_\phi \\ &\quad +\rho\sin\phi\boldsymbol{e}_z. \end{aligned}$$

Vektorin $\boldsymbol{A}$ komponentit sylinterikoordinaatistossa ovat siis

$$\begin{aligned} A_\rho &= z\cos\phi - 2\rho\cos\phi\sin\phi \\ A_\phi &= -z\sin\phi - 2\rho\cos^2\phi \\ A_z &= \rho\sin\phi. \end{aligned}$$

Tällä tavoin laskiessamme emme ole käyttäneet hyväksi sylinterikoordinaatiston ortogonaalisuutta. Tämä menetelmä on siis käyttökelpoinen mille tahansa koordinaattisysteemille.
Koska sylinterikoordinaatisto on suorakulmainen, vektorin komponentit voitaisiin laskea myös skalaaritulojen avulla: esim.

$$\begin{aligned} A_\rho &= \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_\rho = (z\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}) \cdot (\cos\phi\boldsymbol{i} + \sin\phi\boldsymbol{j}) \\ &= z\cos\phi - 2x\sin\phi = z\cos\phi - 2\rho\cos\phi\sin\phi. \end{aligned}$$

3. Kaaren pituus ja tilavuuselementti

Tarkastellaan muunosta

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u_1, u_2, u_3).$$

Nyt

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{r} &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}du_3 \\ &= h_1\,du_1\,\boldsymbol{e}_1 + h_2\,du_2\,\boldsymbol{e}_2 + h_3\,du_3\,\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

ja differentiaalisen kaarenpituuden neliö ds^2 on

$$ds^2 = d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Jos (u_1, u_2, u_3)-koordinaatisto on ortogonaalinen, niin

$$ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2.$$

Koordinaattikäyrällä u_1 ovat u_2 ja u_3 vakioita, jolloin

$$d\boldsymbol{r} = h_1\,du_1\,\boldsymbol{e}_1$$

ja pisteestä P mitattu differentiaalinen kaaren pituus pitkin tätä käyrää on siis

$$ds_1 = h_1\,du_1.$$

Vastaavasti u_2- ja u_3-käyriä myöten mitatut differentiaaliset kaaren pituudet ovat

$$ds_2 = h_2\,du_2 \text{ ja } ds_3 = h_3\,du_3.$$

Suorakulmaisessa koordinaatistossa tilavuuselementti on

$$\begin{aligned} dV &= |(h_1\,du_1\,\boldsymbol{e}_1) \cdot (h_2\,du_2\,\boldsymbol{e}_2) \times (h_3\,du_3\,\boldsymbol{e}_3)| \\ &= h_1 h_2 h_3\,du_1 du_2 du_3. \end{aligned}$$

4. Gradientti, divergenssi ja roottori

Tarkastellaan skalaarifunktion $\Phi(x, y, z)$ gradienttia $\nabla\Phi$ ortogonaalisessa käyräviivaisessa koordinaatistossa:

$$\nabla\Phi = f_1\boldsymbol{e}_1 + f_2\boldsymbol{e}_2 + f_3\boldsymbol{e}_3.$$

Koska

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{r} &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}du_3 \\ &= h_1\,du_1\,\boldsymbol{e}_1 + h_2\,du_2\,\boldsymbol{e}_2 + h_3\,du_3\,\boldsymbol{e}_3, \end{aligned}$$

voimme kirjoittaa funktion Φ differentiaalin muotoon

$$d\Phi = \nabla\Phi \cdot d\boldsymbol{r} = h_1 f_1\,du_1 + h_2 f_2\,du_2 + h_3 f_3\,du_3.$$

Toisaalta voimme pitää funktiota Φ muuttujien u_1, u_2 ja u_3 funktiona, jolloin

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial u_3}du_3.$$

Jotta nämä lausekkeet olisivat yhtäsuuria, täytyy differentiaalien du_i kertoimien olla molemmissa lausekkeissa samoja:

$$f_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1},\ f_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2},\ f_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}.$$

Saamme siis

$$\nabla\Phi = \frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2} + \frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}.$$

Gradienttioperaattori voidaan näin ollen kirjoittaa muotoon

$$\nabla = \frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}.$$

Tarkastellaan ortogonaalista koordinaatistoa ja valitaan $\Phi = u_1$. Edellisen perusteella on

$$\nabla u_1 = \frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1},$$

joten

$$|\nabla u_1| = \frac{|\boldsymbol{e}_1|}{h_1} = \frac{1}{h_1}.$$

Vastaavat lausekkeet saadaan muiden koordinaattien gradienttien pituudelle. Koska tarkasteltava (u_1, u_2, u_3)-koordinaatisto on ortogonaalinen, täytyy olla voimassa

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \pm\boldsymbol{e}_3.$$

Numeroimalla tarvittaessa koordinaatit uudelleen saadaan aikaiseksi oikeakätinen koordinaatisto, jolle on voimassa

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$$

ja tämän sykliset permutaatiot.
Tällöin m.m.

$$\nabla u_1 \times \nabla u_2 = \frac{\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2}{h_1 h_2} = \frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1 h_2},$$

eli

$$\boldsymbol{e}_3 = h_1 h_2 \nabla u_1 \times \nabla u_2,$$

ja samoin muille syklisille permutaatioille.
Tarkastellaan nyt vektorifunktion

$$\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3$$

divergenssiä. Edellisen perusteella on

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(A_3\boldsymbol{e}_3) &= \nabla\cdot(A_3 h_1 h_2 \nabla u_1 \times \nabla u_2)\\ &= \nabla(A_3 h_1 h_2)\cdot(\nabla u_1 \times \nabla u_2)\\ &\quad + A_3 h_1 h_2 \nabla\cdot(\nabla u_1 \times \nabla u_2).\end{aligned}$$

Koska divergenssille on voimassa

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

ja koska gradientin roottori on nolla, saadaan jälkimmäisessä termissä

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot(\nabla u_1 \times \nabla u_2)\\ &\quad = \nabla u_2\cdot(\nabla\times\nabla u_1) - \nabla u_1\cdot(\nabla\times\nabla u_2) = 0.\end{aligned}$$

Komponentin $A_3\boldsymbol{e}_3$ divergenssi on siis

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(A_3\boldsymbol{e}_3) &= \nabla(A_3 h_1 h_2)\cdot\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}\times\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2}\\ &= \nabla(A_3 h_1 h_2)\cdot\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1 h_2}\\ &= \left[\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}(A_3 h_1 h_2) + \frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3 h_1 h_2)\right.\\ &\quad \left.+\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(A_3 h_1 h_2)\right]\cdot\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1 h_2}\\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(A_3 h_1 h_2).\end{aligned}$$

Toistamalla sama lasku vektorin $\boldsymbol{A}$ muille komponenteille saadaan

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 h_3 A_2)\right.\\ &\quad \left.+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 A_3)\right].\end{aligned}$$

Samankaltainen lasku osoittaa, että roottori voidaan kirjoittaa muotoon

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\boldsymbol{e}_1 & h_2\boldsymbol{e}_2 & h_3\boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}.$$

Laplacen operaattori tulee muotoon

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\right)\right.\\ &\quad \left.+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\right)\right].\end{aligned}$$

Esim. Sylinterikoordinaatisto. Nyt koordinaatit ovat $u_1 = \rho$, $u_2 = \phi$ ja $u_3 = z$, yksikkövektorit ovat $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_\rho$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_\phi$ ja $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_z$ ja skaalaustekijät $h_1 = h_\rho = 1$, $h_2 = h_\phi = \rho$ ja $h_3 = h_z = 1$. Skalaarifunktion gradientti on

$$\begin{aligned}\nabla\Phi &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\boldsymbol{e}_3\\ &= \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z.\end{aligned}$$

Vektorifunktion $\boldsymbol{A} = A_\rho\boldsymbol{e}_\rho + A_\phi\boldsymbol{e}_\phi + A_z\boldsymbol{e}_z$ divergenssi on

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 h_3 A_2)\right.\\ &\quad \left.+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 A_3)\right]\\ &= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial\rho A_z}{\partial z}\right].\end{aligned}$$

1° **Sylinteri- ja pallokoordinaatistot**
a. Sylinterikoordinaatisto
Muunnos:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi \\ y &= \rho\sin\phi \\ z &= z, \end{aligned}$$

missä

$$\rho \geq 0,\ 0 \leq \phi < 2\pi,\ -\infty < z < \infty.$$

Kantavektorit:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_\rho &= \cos\phi\boldsymbol{i} + \sin\phi\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{e}_\phi &= -\sin\phi\boldsymbol{i} + \cos\phi\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{e}_z &= \boldsymbol{k}, \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i} &= \cos\phi\boldsymbol{e}_\rho - \sin\phi\boldsymbol{e}_\phi \\ \boldsymbol{j} &= \sin\phi\boldsymbol{e}_\rho + \cos\phi\boldsymbol{e}_\phi \\ \boldsymbol{k} &= \boldsymbol{e}_z. \end{aligned}$$

Skaalaustekijät:

$$h_\rho = 1,\ h_\phi = \rho,\ h_z = 1.$$

Tilavuuselementti:

$$dV = \rho\, d\rho d\phi dz.$$

Gradientti:

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z.$$

Divergenssi:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_z)\right].$$

Roottori:

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}.$$

Laplacen operaattori:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.$$

b. Pallokoordinaatisto
Muunnos:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta, \end{aligned}$$

missä

$$r \geq 0,\ 0 \leq \phi < 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Kantavektorit:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_r &= \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{e}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{i} + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{j} - \sin\theta\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{e}_\phi &= -\sin\phi\boldsymbol{i} + \cos\phi\boldsymbol{j}, \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i} &= \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_\theta - \sin\phi\boldsymbol{e}_\phi \\ \boldsymbol{j} &= \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_\theta + \cos\phi\boldsymbol{e}_\phi \\ \boldsymbol{k} &= \cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta. \end{aligned}$$

Skaalaustekijät:

$$h_r = 1,\ h_\theta = r,\ h_\phi = r\sin\theta.$$

Tilavuuselementti:

$$dV = r^2\sin\theta\, drd\theta d\phi.$$

Gradientti:

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi.$$

Divergenssi:

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}. \end{aligned}$$

Roottori:

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi \end{vmatrix}.$$

Laplacen operaattori:

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}. \end{aligned}$$

5. Kontra- ja kovariantit komponentit

Tarkastellaan yleistä (ei välttämättä ortogonaalista) käyräviivaista koordinaattisysteemiä (u_1, u_2, u_3). Olkoon P jokin avaruuden piste. Edellä konstruoimme pisteeseen P liittyvät yksikkövektorit $\boldsymbol{e}_i$ koordinaattikäyrien tangenttien $\partial\boldsymbol{r}/\partial u_i$ suuntaisiksi. Toinen mahdollisuus on asettaa yksikkövektorit koordinaattipintojen normaalien suuntaiseksi. Jos pinnat $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$ ja $u_3 = c_3$ leikkaavat pisteessä P, niin vektorit ∇u_1, ∇u_2 ja ∇u_3 ovat pisteessä P pintojen normaalien suuntaiset. Normittamalla nämä, t.s. jakamalla pituuksilla $|\nabla u_i|$, saisimme aikaan yksikkövektorijärjestelmän

$$\boldsymbol{E}_i = \frac{\nabla u_i}{|\nabla u_i|},\ i = 1, 2, 3.$$

Jos koordinaatisto on ortogonaalinen, nämä vektorit yhtyvät aikaisempiin vektoreihin

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}\right|},\ i = 1, 2, 3.$$

Merkitään lyhyyden vuoksi

$$\boldsymbol{a}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i} \text{ ja } \boldsymbol{b}_i = \nabla u_i.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{r} &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3} du_3 \\ &= \boldsymbol{a}_1\, du_1 + \boldsymbol{a}_2\, du_2 + \boldsymbol{a}_3\, du_3. \end{aligned}$$

Koska toisaalta on

$$\begin{aligned} du_1 &= \nabla u_1 \cdot d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b}_1 \cdot d\boldsymbol{r} \\ &= (\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1) du_1 + (\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2) du_2 + (\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{a}_3) du_3, \end{aligned}$$

täytyy olla voimassa

$$\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 = 1,\ \boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = 0,\ \boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{a}_3 = 0.$$

Suorittamalla sama lasku vektoreille $\boldsymbol{b}_2$ ja $\boldsymbol{b}_3$ saadaan

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = \delta_{ij}.$$

Vektorit $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ ja $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ muodostavat siis n.s. *resiprokaalisen* vektorisysteemin.
Koska vektorit $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ tai $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ ovat avaruuden $\mathcal{R}^3$ kantavektoreita (*eivät* yleensä yksikkövektoreita), mikä tahansa avaruuden vektori $\boldsymbol{A}$ voidaan esittää joko muodossa

$$\boldsymbol{A} = C_1 \boldsymbol{a}_1 + C_2 \boldsymbol{a}_2 + C_3 \boldsymbol{a}_3$$

tai muodossa

$$\boldsymbol{A} = c_1 \boldsymbol{b}_1 + c_2 \boldsymbol{b}_2 + c_3 \boldsymbol{b}_3.$$

Suureita C_1, C_2, C_3 sanotaan vektorin $\boldsymbol{A}$ *kontravarianteiksi komponenteiksi* ja suureita c_1, c_2, c_3 *kovarianteiksi komponenteiksi.*
Tarkastellaan kahta yleistä käyräviivaista koordinaattisysteemiä (u_1, u_2, u_3) ja $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$.
Koordinaatit (x, y, z) voidaan lausua joko muodossa

$$\begin{aligned} x &= x_1(u_1, u_2, u_3) \\ y &= y_1(u_1, u_2, u_3) \\ z &= z_1(u_1, u_2, u_3) \end{aligned}$$

tai

$$\begin{aligned} x &= x_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) \\ y &= y_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) \\ z &= z_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3). \end{aligned}$$

Koska näistä yhtälöistä voidaan ratkaista koordinaatit (u_1, u_2, u_3) (tai $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$) karteesisten koordinaattien (x, y, z) funktiona, on olemassa differentioituva kuvaus suoraan muuttujista $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ muuttujiin (u_1, u_2, u_3):

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) \\ u_2 &= u_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) \\ u_3 &= u_3(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3), \end{aligned}$$

ja päinvastoin.
Differentiaali $d\boldsymbol{r}$ voidaan kirjoittaa kahdella tavalla: joko

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{r} &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3} du_3 \\ &= \boldsymbol{a}_1 du_1 + \boldsymbol{a}_2 du_2 + \boldsymbol{a}_3 du_3, \end{aligned}$$

tai

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{r} &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \bar{u}_1} d\bar{u}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \bar{u}_2} d\bar{u}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \bar{u}_3} d\bar{u}_3 \\ &= \bar{\boldsymbol{a}}_1 d\bar{u}_1 + \bar{\boldsymbol{a}}_2 d\bar{u}_2 + \bar{\boldsymbol{a}}_3 d\bar{u}_3, \end{aligned}$$

joten

$$\boldsymbol{a}_1 du_1 + \boldsymbol{a}_2 du_2 + \boldsymbol{a}_3 du_3 = \bar{\boldsymbol{a}}_1 d\bar{u}_1 + \bar{\boldsymbol{a}}_2 d\bar{u}_2 + \bar{\boldsymbol{a}}_3 d\bar{u}_3.$$

Sijoitetaan tähän differentiaalit du_i laskettuna käyräviivaisten koordinaatistojen välisistä suorista muunnoskaavoista, t.s. lausekkeet

$$\begin{aligned} du_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_1} d\bar{u}_1 + \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_2} d\bar{u}_2 + \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_3} d\bar{u}_3 \\ du_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_1} d\bar{u}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_2} d\bar{u}_2 + \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_3} d\bar{u}_3 \\ du_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_1} d\bar{u}_1 + \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_2} d\bar{u}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_3} d\bar{u}_3. \end{aligned}$$

Samaistamalla differentiaalien $d\bar{u}_i$ kertoimet saadaan kantavektorien transformaatiokaavoiksi

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{a}}_1 &= \boldsymbol{a}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_1} + \boldsymbol{a}_2 \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_1} + \boldsymbol{a}_3 \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_1} \\ \bar{\boldsymbol{a}}_2 &= \boldsymbol{a}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_2} + \boldsymbol{a}_2 \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_2} + \boldsymbol{a}_3 \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_2} \\ \bar{\boldsymbol{a}}_3 &= \boldsymbol{a}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_3} + \boldsymbol{a}_2 \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_3} + \boldsymbol{a}_3 \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_3} \end{aligned}$$

eli lyhyesti

$$\bar{\boldsymbol{a}}_i = \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{a}_j \frac{\partial u_j}{\partial \bar{u}_i}. \tag{1}$$

Olkoon $\boldsymbol{A}$ jokin vektori. Näissä koordinaatistoissa se voidaan kirjoittaa joko muodossa

$$\boldsymbol{A} = C_1 \boldsymbol{a}_1 + C_2 \boldsymbol{a}_2 + C_3 \boldsymbol{a}_3$$

tai

$$\boldsymbol{A} = \bar{C}_1 \bar{\boldsymbol{a}}_1 + \bar{C}_2 \bar{\boldsymbol{a}}_2 + \bar{C}_3 \bar{\boldsymbol{a}}_3.$$

Täytyy siis olla voimassa

$$\begin{aligned} & C_1 \boldsymbol{a}_1 + C_2 \boldsymbol{a}_2 + C_3 \boldsymbol{a}_3 \\ &\quad = \bar{C}_1 \bar{\boldsymbol{a}}_1 + \bar{C}_2 \bar{\boldsymbol{a}}_2 + \bar{C}_3 \bar{\boldsymbol{a}}_3 \\ &\quad = \left(\bar{C}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_1} + \bar{C}_2 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_2} + \bar{C}_3 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_3} \right) \boldsymbol{a}_1 \\ &\quad + \left(\bar{C}_1 \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_1} + \bar{C}_2 \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_2} + \bar{C}_3 \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_3} \right) \boldsymbol{a}_2 \\ &\quad + \left(\bar{C}_1 \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_1} + \bar{C}_2 \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_2} + \bar{C}_3 \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_3} \right) \boldsymbol{a}_3. \end{aligned}$$

Koska kantavektorit ovat lineaarisesti riippumattomia, täytyy olla voimassa

$$\begin{aligned}
C_1 &= \bar{C}_1\frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_1} + \bar{C}_2\frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_2} + \bar{C}_3\frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_3} \\
C_2 &= \bar{C}_1\frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_1} + \bar{C}_2\frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_2} + \bar{C}_3\frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_3} \\
C_3 &= \bar{C}_1\frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_1} + \bar{C}_2\frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_2} + \bar{C}_3\frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_3}
\end{aligned}$$

tai lyhyesti

$$C_i = \sum_{j=1}^{3} \bar{C}_j \frac{\partial u_i}{\partial \bar{u}_j}. \tag{2}$$

Vertaamalla transformaatiokaavoja (1) ja (2) näemme, että sama lineaarinen kuvaus (matriisi $M = (\partial u_j/\partial \bar{u}_i)$), joka vie kantavektorit vanhasta koordinaatistosta (u_1, u_2, u_3) uuteen koordinaatistoon $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$, vie vektorin kontravariantit komponentit uudesta koordinaatistosta vanhaan (matriisi M^T). Nämä komponentit transformoituvat siis "päinvastoin" kuin kantavektorit $\boldsymbol{a}_i$; siitä nimitys *kontravariantti.*
Vaihtamalla keskenään koordinaatit (u_1, u_2, u_3) ja $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ täsmälleen sama lasku osoittaa, että uudet koordinaatit $\bar{C}_i$ saadaan vanhoista kuten

$$\bar{C}_i = \sum_{j=1}^{3} C_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial u_j}.$$

Samankaltainen päättely osoittaa, että kovariantit komponentit c_i transformoituvat koordinaatistomuunnoksessa kaavan

$$\bar{c}_i = \sum_{j=1}^{3} c_j \frac{\partial u_j}{\partial \bar{u}_i}$$

mukaan, eli täsmälleen samoin kuin kantavektorit $\boldsymbol{a}_i$; siitä nimitys *kovariantti.*

Tensorilaskentaa

Fysiikan lakien täytyy olla riippumattomia siitä koordinaattijärjestelmästä, jossa niitä matemaattisesti esitetään. Tämän vaatimuksen seurauksien tutkimus johtaa *tensorilaskentaan.*
Vektorin $\boldsymbol{A}$ kovariantit (ja kontravariantit) komponentit c_i muodostavat *tensorin.* Edellä näimme, että koordinaatiston muunnoksissa nämä komponentit transformoituvat kantavektorien tavoin. Yleisesti tensorit määritellään niiden transformaatio-ominaisuuksien perusteella.
Tarkastellaan N ulotteisia avaruuksia (vaikkakin esimerkeissä rajoitumme useimmiten kolmiulotteisiin avaruuksiin). Olkoot pisteen P koordinaatit jossakin koordinaattijärjestelmässä $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ ja jossakin toisessa järjestelmässä $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N)$.
Näiden koordinaattijärjestelmien välillä on yksikäsitteinen differentioituva kuvaus

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= \bar{x}_1(x_1, x_2, \ldots, x_N) \\
\bar{x}_2 &= \bar{x}_2(x_1, x_2, \ldots, x_N) \\
\vdots \;&\vdots\; \vdots \\
\bar{x}_N &= \bar{x}_N(x_1, x_2, \ldots, x_N),
\end{aligned}$$

tai lyhyemmin

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, x_2, \ldots, x_N);\; i = 1, 2, \ldots, N.$$

Osoittautuu hyödylliseksi ottaa käyttöön myös yläindeksit: x^k ei tarkoita potenssiinkorotusta, vaan sitä, että se on jokin suureista x^1, x^2, … tai x^N.
Kompaktimpaan merkintään päästään, kun käytetään (vanhaa tuttua) *summaussopimusta*: jos jossakin termissä sama indeksi toistuu, niin silloin on kyseessä summaus 1:stä N:ään yli tämän indeksin. Esim.

$$a_{ij} b^j_k c^l_k = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} a_{ij} b^j_k c^l_k.$$

Indeksiä, joka esiintyy termissä vain kerran, sanotaan *vapaaksi indeksiksi.*

1. Karteesiset tensorit

Tarkastellaan suoraviivaisten ortogonaalisten eli karteesisten koordinaatistojen välisiä muunnoksia.
Olkoon M lineaarinen operaattori (matriisi), joka kuvaa vektorin x vektoriksi

$$y = Mx.$$

Siirryttäessä karteesisesta koordinaatistosta toiseen, säilyvät vektorien väliset skalaaritulot muuttumattomina.
Osoitetaan, että matriisi M on rotaatio-operaattori, jos ja vain jos se on ortogonaalinen.
Oletetaan, että M on ortogonaalinen, t.s. $M^T = M^{-1}$.
Tällöin

$$\begin{aligned}
y_1^T y_2 &= (Mx_1)^T (Mx_2) = x_1^T M^T M x_2 \\
&= x_1^T M^{-1} M x_2 = x_1^T x_2,
\end{aligned}$$

eli vektorien väliset skalaaritulot säilyvät tässä kuvauksessa. Erikoisesti vektorin pituus on invariantti. Operaattori M esittää siis rotaatiota.
Kääntäen: oletetaan, että M on rotaatio-operaattori. Rotaatioissa vektorien väliset skalaaritulot säilyvät, joten mielivaltaisille vektoreille x_1 ja x_2 täytyy olla voimassa

$$y_1^T y_2 = x_1^T M^T M x_2 = x_1^T x_2,$$

kun y_1 ja y_2 ovat vektoreiden x_1 ja x_2 kuvavektorit. Valitaan vektoriksi x_1 vektori, jonka i:s komponentti on 1 muiden ollessa nollia ja vektoriksi x_2 vektori, jonka j:s komponentti on 1 muiden ollessa nollia. Tällöin

$$x_1^T x_2 = \delta_{ij},$$

joten

$$(M^T M)_{ij} = x_1^T M^T M x_2 = \delta_{ij}.$$

(Helposti voidaan näyttää, että mille tahansa neliömatriisille $A = (a_{ij})$ on voimassa $x_1^T A x_2 = a_{ij}$.)
Matriisi M on siis ortogonaalinen. Esim. matriisi

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

on ortogonaalinen ja kiertää vektoreita kaksiulotteisessa tasossa.
Ortogonaalisen matriisin determinantti on ± 1:

$$|M| = \det M = \pm 1.$$

Jos $\det M = 1$, niin kyseessä on tavanomainen kierto ja jos $\det M = -1$, niin kyseessä on yhdistetty inversio (peilaus) ja kierto.
Olkoot $A = (A_1, A_2, \ldots, A_N)$ ja $B = (B_1, B_2, \ldots, B_N)$ vektoreita. Näiden *ulkotulo* muodostuu N^2 komponentista

$$c_{ij} = A_i B_j.$$

Yleisesti n:n vektorin $A, B, \ldots, S$ ulkotulon komponentit ovat $A_{i_1} B_{i_2} \cdots S_{i_n}$.
Tarkastellaan suuretta A ja sen kuvaa A' muunnoksessa M. Transformaatio-ominaisuuksien mukaan suure A on

- *skalaari*, jos se säilyy muuttumattomana koordinaatiston kierrossa, t.s. $A' = A$. Skalaaria sanotaan *0:nnen kertaluvun tensoriksi*. Skalaarin komponenttien lukumäärä on $N^0 = 1$.

- *vektori*, jos se transformoituu koordinaatiston kierrossa matriisin M osoittamalla tavalla, t.s. jos

  $$A' = MA \text{ eli } A'_i = M_{ij} A_j.$$

  Vektoria sanotaan *1. kertaluvun tensoriksi*. Vektorin komponenttien lukumäärä on $N^1 = N$ (kolmessa ulottuvuudessa 3). Vektorikenttä saadaan asettamalla avaruuden jokaiseen pisteeseen vektori A.

- *pseudovektori*, jos sen komponentit transformoituvat kuten vektorin komponentit kerrottuna tekijällä $\det M$, t.s.

  $$A'_i = |M| M_{ij} A_j.$$

  Esim., jos $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ ovat kolmiulotteisia vektoreita, ne transformoituvat inversiossa

  $$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  kuten

  $$\boldsymbol{A}' = M\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A} \text{ ja } \boldsymbol{B}' = M\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}.$$

  Niiden vektoritulo $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ puolestaan transformoituu tässä inversiossa kuten

  $$\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C},$$

  eli

  $$C'_i = (-1) M_{ij} C_j = |M| M_{ij} C_j,$$

  joten $\boldsymbol{C}$ on pseudovektori.

- n:nnen kertaluvun tensori, jos sen komponentit transformoituvat kuten n:n vektorin ulkotulot. Esim. suure C, jonka komponentit C_{ij} ovat

  $$C_{ij} = A_i B_j,$$

  transformoituu kuten

  $$\begin{aligned} C'_{ij} &= A'_i B'_j = M_{ik} A_k M_{jl} B_l \\ &= M_{ik} M_{jl} A_k B_l = M_{ik} M_{jl} C_{kl} \\ &= M_{ik} C_{kl} M_{jl}, \end{aligned}$$

  ja on siis 2. kertaluvun tensori.

Toisen kertaluvun tensorien transformaatiokaava voidaan esittää myös kompaktimmassa muodossa. Ajatellaan tensoria $C_{ij} = A_i B_j$ matriisina

$$C = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3 \\ A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3 \\ A_3B_1 & A_3B_2 & A_3B_3 \end{pmatrix}.$$

Koska $M^T = M^{-1}$ eli

$$M_{jl} = M^T_{lj} = M^{-1}_{lj}$$

saadaan

$$C_{kl} M_{jl} = C_{kl} M^{-1}_{lj} = (CM^{-1})_{kj}$$

ja

$$\begin{aligned} C'_{ij} &= M_{ik} C_{kl} M_{jl} = M_{ik} (CM^{-1})_{kj} \\ &= (MCM^{-1})_{ij}, \end{aligned}$$

eli

$$C' = MCM^{-1}.$$

Toisen kertaluvun tensori transformoituu siis kuten matriisi.
Esim. Sähkökenttä $\boldsymbol{E}$ aiheuttaa kiinteässä aineessa dipolimomentin $\boldsymbol{P}$, joka ei aina ole yhdensuuntainen

kentän $\boldsymbol{E}$ kanssa. Vektorien $\boldsymbol{E}$ ja $\boldsymbol{P}$ välinen relaatio voidaan esittää muodossa

$$\boldsymbol{P} = \alpha \boldsymbol{E},$$

missä α on polarisoituvuustensori. Tämän relaation on oltava voimassa esitettiinpä se missä tahansa koordinaattisysteemissä, t.s. kun $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{P}'$ ja α' ovat vastaavat suureet jossakin toisessa koordinaatistossa, täytyy olla voimassa

$$\boldsymbol{P}' = \alpha' \boldsymbol{E}'.$$

Jos matriisi M vie vektorit $\boldsymbol{E}$ ja $\boldsymbol{P}$ uuteen koordinaatistoon, t.s. jos

$$\boldsymbol{P}' = M\boldsymbol{P} \text{ ja } \boldsymbol{E}' = M\boldsymbol{E},$$

niin on oltava voimassa

$$\begin{aligned} \alpha' \boldsymbol{E}' &= M\boldsymbol{P} = M\alpha \boldsymbol{E} \\ &= M\alpha M^{-1}\boldsymbol{E}', \end{aligned}$$

eli

$$\alpha' = M\alpha M^{-1}.$$

Polarisoituvuus α on siis 2. kertaluvun tensori.
Toisen kertaluvun tensori a_{ij} on

- symmetrinen, jos $a_{ij} = a_{ji}$.
- antisymmetrinen, jos $a_{ij} = -a_{ji}$. Tällöin $a_{ii} = 0$.

Karteesinen tensori säilyttää symmetriaominaisuutensa rotaatioissa.
Esim. Toisen kertaluvun antisymmetrisen tensorin

$$c_{ij} = A_i B_j - A_j B_i$$

9 komponentista (oletetaan A_i ja B_i kolmiulotteisen avaruuden vektoreiksi) vain 3 on riippumatonta. Jos esim. c_{12}, c_{13} ja c_{23} tunnetaan, niin muut komponentit voidaan laskea.
Ilmeisestikin on

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_1 &= c_{23} = A_2B_3 - A_3B_2 = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_1 \\ \boldsymbol{b}_2 &= c_{31} = A_3B_1 - A_1B_3 = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_2 \\ \boldsymbol{b}_3 &= c_{12} = A_1B_2 - A_2B_1 = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_3, \end{aligned}$$

joten kolmiulotteisen antisymmetrisen tensorin komponentteina ovat pseudovektorin $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ komponentit.
Esim. Kolmannen kertaluvun tensori a_{ijk} transformoituu määritelmänsä mukaan, kuten kolmen vektorin ulkotulon komponentit, eli kuten

$$a'_{ijk} = M_{il}M_{jm}M_{kn}a_{lmn}.$$

2. Ei-karteesiset tensorit

Osoittautuu hyödylliseksi ottaa käyttöön myös yläindeksit. Pisteen koordinaatteja N-ulotteisessa avaruudessa merkitään tällöin kuten $(x^1, x^2, \ldots, x^N)$.

Tarkastellaan aluksi yksinkertaisuuden vuoksi muunnosta *suoraviivaisten*, vinokulmaisten, 2-dimensioisten koordinaatistojen välillä. Merkitään symboleilla $\hat{e}_1$ ja $\hat{e}_2$ koordinaattiakselien x^1 ja x^2 suuntaisia yksikkövektoreita. Koska koordinaatisto *ei* ole suorakulmainen, niin

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 \neq 0.$$

Vektoreita $\hat{e}_1$ ja $\hat{e}_2$ sanotaan *kovarianteiksi* kantavektoreiksi. *Kontravariantit* kantavektorit $\hat{e}^1$ ja $\hat{e}^2$ ovat koordinaattitasoja (2-ulotteisessa tapauksessa koordinaattiakseleita) vastaan kohtisuorassa olevat yksikkövektorit.

1° **Kovariantit ja kontravariantit vektorit**
Kaksiuloitteisen avaruuden vektori A voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa

$$A = a^1\hat{e}_1 + a^2\hat{e}_2 = a^i\hat{e}_i.$$

Tässä a^1 ja a^2 ovat vektorin A *kontravariantit komponentit.*
Vektorin A projektiot koordinaattiakseleilla ovat

$$\begin{aligned} a_1 &= A\cdot\hat{e}_1 \neq a^1 \\ a_2 &= A\cdot\hat{e}_2 \neq a^2. \end{aligned}$$

Lukuja a_1 ja a_2 sanotaan vektorin A *kovarianteiksi* komponenteiksi. Suorakulmaisessa koordinaatistossa ilmeisestikin kovariantit- ja kontravariantit komponentit yhtyvät, t.s. $a_i = a^i$.

2° **Vektorikomponenttien muunnosominaisuudet**
Pidetään vektoria A kiinteänä ja muutetaan koordinaatistoa siten, että kantavektorit $\hat{e}_i$ muuntuvat kuten

$$\hat{e}'_i = M_{ij}\hat{e}_j.$$

Vektorin A uudet kovariantit komponentit ovat silloin

$$a'_i = A\cdot\hat{e}'_i = M_{ij}A\cdot\hat{e}_j = M_{ij}a_j.$$

*Kovariantit komponentit muuntuvat siis kantavektoreiden tavoin (*co-variant*).*
Kontravarianttien komponenttien transformaatiokaava saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} A &= a^i\hat{e}_i = a^i(M^{-1})_{ij}\hat{e}'_j \\ &= (M^{-1})^T_{ji}a^i\hat{e}'_j \equiv a'^j\hat{e}'_j, \end{aligned}$$

eli

$$a'^i = (M^{-1})^T_{ij}a^j.$$

Huom. Karteesisten koordinaatistojen väliset muunnokset ovat rotaatioita, jolloin matriisi M on ortogonaalinen eli $M^T = M^{-1}$, ja

$$(M^{-1})^T = M.$$

Tällöin kontra- ja kovariantit komponentit transformoituvat täsmälleen samalla tavalla. Näin tietysti pitää ollakin, koska karteesisissa koordinaatistoissa on $a_i = a^i$.

Saadut muunnosrelaatiot voidaan yleistää useampiulotteisiin avaruuksiin samoin kuin korkeamman kertaluvun tensoreihin.
Esim. Kun kantavektorit transformoituvat yhtälön

$$\hat{e}_i' = M_{ij}\hat{e}_j$$

mukaan, niin 2. kertaluvun tensorin *kovarianttien* komponenttien muunnos on

$$a_{ij}' = M_{ik}M_{jl}a_{kl},$$

ja *kontravarianttien* komponenttien transformaatio on

$$a'^{ij} = (M^{-1})_{ik}^T(M^{-1})_{jl}^T a^{kl}.$$

3. Käyräviivaiset koordinaatistot; yleiset tensorit

Yleisessä tapauksessa kantavektoreiden suunnat riippuvat paikasta (esim. sylinterikoordinaatisto). Otetaan käyttöön merkinnät, jotka soveltuvat kaikkiin tilanteisiin. Tarkastellaan N-uloitteista avaruutta ja sen jotakin koordinaattijärjestelmää $(x^1, x^2, \ldots, x^N)$. Tämän koordinaatiston ja karteesisen koordinaatiston $(z^1, z^2, \ldots, z^N)$ $(z^1 = x, z^2 = y, \ldots)$ välillä (samoin kuin kaikkien muidenkin koordinaatistojen välillä) on yksikäsitteinen kuvaus

$$z^i = z^i(x^1, x^2, \ldots, x^N),\ i = 1, 2, \ldots, N.$$

Merkitään symbolilla s radiusvektoria. Karteesisessa koordinaatistossa

$$s = z^i\hat{e}_i = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + \cdots = \boldsymbol{r},$$

kun $\hat{e}_i$ ovat karteesisen koordinaatiston yksikkökantavektorit.

1° Kantavektorit, viivaelementti ja metrinen perustensori

Olkoon $E_1, E_2, \ldots, E_N$ mielivaltainen kantavektorijoukko. Mielivaltainen vektori A voidaan esittää muodossa

$$A = a^iE_i.$$

Erikoisesti radiusvektori on

$$s = x^iE_i$$

ja *differentiaalinen radiusvektori* eli *viivaelementti* ds niin ollen

$$ds = dx^iE_i.$$

Viivaelementin itseisarvo on kahden infinitesimaalisella etäisyydellä toisistaan olevan pisteen välimatka. *Viivaelementin neliö* ds^2 määritellään siten, että

$$\begin{aligned} ds^2 &= ds \cdot ds = dx^iE_i \cdot dx^jE_j \\ &= E_i \cdot E_j\, dx^idx^j. \end{aligned}$$

Metrisen perustensorin g *kovariantit komponentit* määritellään kantavektoreiden E_i skalaarituloina:

$$g_{ij} = E_i \cdot E_j,$$

joten

$$ds^2 = g_{ij}dx^idx^j.$$

Metrisen perustensorin kontravariantit komponentit g^{ij} määritellään yhtälöllä

$$g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i,$$

missä δ_j^i on Kroneckerin delta

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, \text{ kun } i = j \\ 0, \text{ kun } i \neq j. \end{cases}$$

Jos kovariantit komponentit tunnetaan, niin kontravariantit komponentit voidaan laskea käänteismatriisin muodostamismenetelmällä:

$$(g_{ij})^{-1} = g^{ij} = \frac{\mathrm{adj}\,(g_{ij})}{\det\,(g_{ij})} = \frac{(|g_{ji}|)}{|g|}.$$

Jos g_{ij} on diagonaalinen, niin g^{ij} on diagonaalinen ja

$$g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}}$$

Esim. Sylinterikoordinaatisto

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi \\ y &= \rho\sin\phi \\ z &= z. \end{aligned}$$

Radiusvektori karteesisissa koordinaateissa on

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

ja viivaelementin komponentit ovat

$$\begin{aligned} dx &= \cos\phi\, d\rho - \rho\sin\phi\, d\phi \\ dy &= \sin\phi\, d\rho + \rho\cos\phi\, d\phi \\ dz &= dz. \end{aligned}$$

Viivaelementin neliö on siis

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2 \\ &= g_{ij}dx^idx^j. \end{aligned}$$

Numeroidaan sylinterikoordinaatit kuten

$$x^1 = \rho;\ x^2 = \phi;\ x^3 = z.$$

Viivaelementin neliön lausekkeesta voidaan nyt lukea metrisen perustensorin kovarianteiksi komponenteiksi

$$\begin{aligned} g_{11} &= g_{\rho\rho} = 1 \\ g_{22} &= g_{\phi\phi} = \rho^2 \\ g_{33} &= g_{zz} = 1 \\ g_{ij} &= 0, \text{ kun } i \neq j. \end{aligned}$$

Kovariantit komponentit muodostavat siis diagonaalisen matriisin

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tämän käänteismatriisin

$$(g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = g^{ij}$$

alkioina ovat metrisen perustensorin kontravariantit komponentit.
Edellisestä luvusta muistetaan, että koordinaattikäyrien suuntaiset tangenttivektorit eli kantavektorit E_i saatiin derivoimalla radiusvektori koordinaattien x^i suhteen. Sylinterikoordinaatistossa kantavektorit ovat siis

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^1} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho} = \cos\phi \boldsymbol{i} + \sin\phi \boldsymbol{j} \\ E_2 &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^2} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = -\rho\sin\phi \boldsymbol{i} + \rho\cos\phi \boldsymbol{j} \\ E_3 &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^3} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = \boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

Metrisen perustensorin kovarianteiksi komponenteiksi kantavektoreiden avulla laskettuna saadaan

$$\begin{aligned} g_{11} &= E_1 \cdot E_1 = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1 \\ g_{22} &= E_2 \cdot E_2 = \rho^2 \sin^2\phi + \rho^2\cos^2\phi = \rho^2 \\ g_{33} &= E_3 \cdot E_3 = 1 \\ g_{ij} &= E_i \cdot E_j = 0, \text{ kun } i \neq j. \end{aligned}$$

Kantavektoreille $\{E_i\}$ *resiprokaaliset* kantavektorit $\{E^i\}$ määritellään siten, että

$$E_i \cdot E^j = \delta_i^j.$$

Esim. Kolmiulotteinen avaruus. Tunnetaan vektorit E_1, E_2 ja E_3. Nyt $E^3 \perp E_1, E_2$, joten

$$E^3 = \alpha E_1 \times E_2.$$

Edelleen $E_3 \cdot E^3 = 1$, eli

$$1 = E_3 \cdot (\alpha E_1 \times E_2),$$

josta

$$\alpha = \frac{1}{E_3 \cdot (E_1 \times E_2)}.$$

Vektori E^3 on siis

$$E^3 = \frac{E_1 \times E_2}{E_3 \cdot (E_1 \times E_2)}.$$

Vastaavasti saadaan

$$\begin{aligned} E^1 &= \frac{E_2 \times E_3}{E_1 \cdot (E_2 \times E_3)} \\ E^2 &= \frac{E_3 \times E_1}{E_2 \cdot (E_3 \times E_1)}. \end{aligned}$$

Esim. sylinterikoordinaatistossa on

$$E^1 = E_1,\ E^2 = \frac{E_2}{\rho^2},\ E^3 = E_3.$$

Olkoon T jokin kantavektoreiden $\{E_i\}$ ja $\{E^i\}$ suorien tulojen superpositio, esim.

$$T = t_{ij}^k E^i E^j E_k.$$

Vektorin $A = a^i E_i$ ja suureen T välisellä skalaaritulolla $T \cdot A$ tarkoitetaan lauseketta

$$\begin{aligned} T \cdot A &= (t_{ij}^k E^i E^j E_k) \cdot (a^l E_l) = t_{ij}^k a^l (E_k \cdot E_l) E^i E^j \\ &= t_{ij}^k a^l g_{kl} E^i E^j = t_{ij}^k a_k E^i E^j. \end{aligned}$$

Vastaavasti skalaaritulo $A \cdot T$ tarkoittaa lauseketta

$$A \cdot T = t_{ij}^k a^l (E_l \cdot E^i) E^j E_k = t_{ij}^k a^l \delta_l^i E^j E_k = t_{ij}^k a^i E^j E_k.$$

Yksikkötensori $\mathcal{E}$ määritellään seuraavasti:

$$\mathcal{E} \equiv E_l E^l = E^l E_l.$$

Olkoon $A = a^i E_i$ mielivaltainen vektori. Nyt

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \cdot A &= (E_l E^l) \cdot (a^i E_i) = a^i E_l (E^l \cdot E_i) \\ &= a^i E_l \delta_i^l = a^i E_i = A. \end{aligned}$$

Vastaavasti on

$$A \cdot \mathcal{E} = A.$$

Metrisen perustensorin kovariantit komponentit g_{ij} määriteltiin skalaarituloina

$$g_{ij} = E_i \cdot E_j.$$

Nyt

$$\begin{aligned} g_{ij} E^j \cdot E^k &= E_i \cdot E_j E^j \cdot E^k = E_i \cdot \mathcal{E} \cdot E^k \\ &= E_i \cdot E^k = \delta_i^k, \end{aligned}$$

eli skalaaritulot $E^i \cdot E^j$ ovat metrisen perustensorin kontravariantit komponentit:

$$g^{ij} = E^i \cdot E^j.$$

Määritellään metrisen perustensorin *sekakomponentit* g_j^i siten, että

$$g_j^i = E^i \cdot E_j = \delta_j^i.$$

2° **Indeksin nosto**
Kantavektoreille on voimassa

$$E^i = E^i \cdot \mathcal{E} = E^i \cdot E^k E_k = g^{ik} E_k.$$

Kantavektoreista $\{E_i\}$ saadaan siis resiprokaaliset kantavektorit $\{E^i\}$ operaatiolla

$$E^i = g^{ik} E_k.$$

Olkoon A mielivaltainen vektori. Kirjoitetaan se kantavektoreiden $\{E^i\}$ avulla kuten

$$A = a_i E^i.$$

Vastaavasti kantavektoreiden $\{E_i\}$ avulla se voidaan kirjoittaa muotoon

$$A = a^i E_i.$$

Aivan ilmeisesti on voimassa

$$a^i = A \cdot E^i \text{ ja } a_i = A \cdot E_i.$$

Kontravarianteille komponenteille a^i saadaan siis

$$\begin{aligned} a^i &= E^i \cdot A = E^i \cdot a_k E^k = E^i \cdot E^k a_k \\ &= g^{ik} a_k. \end{aligned}$$

Vektorin komponenttien indeksit voidaan siis nostaa operaatiolla

$$a^i = g^{ij} a_j.$$

3° **Indeksin lasku**
Kantavektoreille E_i on voimassa

$$\begin{aligned} E_i &= E_i \cdot \mathcal{E} = E_i \cdot E_k E^k \\ &= g_{ik} E^k, \end{aligned}$$

eli kontravarianteista kantavektoreista saadaan kovariantit kantavektorit operaatiolla

$$E_i = g_{ik} E^k.$$

Vektorin A kovariantit komponentit

$$a_i = E_i \cdot A$$

saadaan kontravarianteista komponenteista seuraavasti:

$$\begin{aligned} a_i &= E_i \cdot A = E_i \cdot a^k E_k = E_i \cdot E_k a^k \\ &= g_{ik} a^k, \end{aligned}$$

eli

$$a_i = g_{ik} a^k.$$

4° **2. kertaluvun tensori: indeksien nosto ja lasku**
Olkoon T jokin 2. kertaluvun tensori. Kirjoitetaan se kontravarianttien kantavektorien avulla muotoon

$$T = t_{ij} E^i E^j.$$

Toisaalta voisimme valita kantavektoreiksi myös resiprokaaliset kovariantit kantavektorit tai molemmat:

$$\begin{aligned} T &= t_{ij} E^i E^j \\ &= t^i{}_j E_i E^j \\ &= t_i{}^j E^i E_j \\ &= t^{ij} E_i E_j. \end{aligned}$$

Tästä yhtälöstä on ilmeistä, että

$$\begin{aligned} t_{ij} &= E_i \cdot T \cdot E_j \\ t^i{}_j &= E^i \cdot T \cdot E_j \\ t_i{}^j &= E_i \cdot T \cdot E^j \\ t^{ij} &= E^i \cdot T \cdot E^j. \end{aligned}$$

Täsmälleen sama tarkastelu kuin vektorikomponenttien tapauksessa osittaa, että

$$\left\{ \begin{aligned} t^i{}_j &= g^{im} t_{mj} \\ t^{ij} &= g^{im} g^{jn} t_{mn} \\ t_i{}^j &= g^{jn} t_{in} \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} t_i{}^j &= g_{in} t^{nj} \\ t^i{}_j &= g_{jn} t^{in} \\ t_{ij} &= g_{im} g_{jn} t^{mn}. \end{aligned} \right.$$

Huom. Yleisessä tapauksessa $t^i{}_j \neq t_j{}^i$, joten on syytä olla tarkkana merkinnän kanssa. Kuitenkin, jos esim. t_{ij} on symmetrinen, t.s. jos $t_{ij} = t_{ji}$, niin

$$t^i{}_j = g^{im} t_{mj} = g^{im} t_{jm} = t_j{}^i.$$

Tällöin on tapana käyttää merkintää t^i_j, joka tarkoittaa, että indeksien järjestyksellä ei ole merkitystä:

$$t^i_j = t^i{}_j = t_j{}^i.$$

Vastaavasti, jos $t^i{}_j = t_j{}^i$, niin t_{ij} (tai t^{ij}) on symmetrinen. Esim. metrisen perustensorin tapauksessa

$$g^i{}_j = E^i \cdot E_j = E_j \cdot E^i = g_j{}^i = g^i_j = \delta^i_j.$$

4. Koordinaatiston transformaatio

Tarkastellaan koordinaattisysteemejä $(x^1, x^2, \ldots, x^N)$ ja $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N)$. Olkoot näihin liittyvät kovariantit kantavektorijoukot vastaavasti $\{E_1, E_2, \ldots, E_N\}$ ja $\{\bar{E}_1, \bar{E}_2, \ldots, \bar{E}_N\}$. Koordinaattisysteemistä toiseen päästään muunnoskaavoilla

$$\begin{aligned} \bar{x}^i &= \bar{x}^i(x^1, x^2, \ldots, x^N) \\ x^i &= x^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N). \end{aligned}$$

Viivaelementti ds voidaan kirjoittaa kummassa systeemissä tahansa:

$$ds = dx^i E_i = d\bar{x}^i \bar{E}_i.$$

Muunnoskaavojen perusteella differentiaalit dx^i voidaan kirjoittaa muotoon

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} d\bar{x}^k,$$

joten

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} d\bar{x}^k E_i = d\bar{x}^k \bar{E}_k.$$

Koska differentiaalit $d\bar{x}^k$ ovat mielivaltaisia, täytyy niiden kertoimien molemmilla puolin yhtälöä olla samoja, t.s.

$$\bar{E}_k = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} E_i.$$

Esim. Karteesinen koordinaatisto⟶sylinterikoordinaatisto. Merkitään $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ ja $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) = (\rho, \phi, z)$. Karteesisen koordinaatiston kantavektorit ovat

$$E_1 = \boldsymbol{i}, \; E_2 = \boldsymbol{j}, \; E_3 = \boldsymbol{k}.$$

Sylinterikoordinaatistosta päästään karteesiseen koordinaatistoon muunnoksella

$$\begin{aligned} x^1 &= \bar{x}^1 \cos \bar{x}^2 \\ x^2 &= \bar{x}^1 \sin \bar{x}^2 \\ x^3 &= \bar{x}^3. \end{aligned}$$

Sylinterikoordinaatiston kantavektorit ovat siis

$$\begin{aligned}
\bar{E}_1 &= \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^1}E_k = \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1}E_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1}E_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1}E_3 \\
&= \cos\phi \boldsymbol{i} + \sin\phi \boldsymbol{j} \\
\bar{E}_2 &= \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^2}E_k = \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2}E_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2}E_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2}E_3 \\
&= \rho(-\sin\phi \boldsymbol{i} + \cos\phi \boldsymbol{j}) \\
\bar{E}_3 &= \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^3}E_k = \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3}E_3 = \boldsymbol{k}.
\end{aligned}$$

Metrisen perustensorin komponentit sylinterikoordinaatistossa ovat

$$\begin{aligned}
\bar{g}_{11} &= \bar{E}_1 \cdot \bar{E}_1 = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1 \\
\bar{g}_{22} &= \bar{E}_2 \cdot \bar{E}_2 = \rho^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi) = \rho^2 \\
\bar{g}_{33} &= \bar{E}_3 \cdot \bar{E}_3 = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1 \\
\bar{g}_{ij} &= \bar{E}_i \cdot \bar{E}_j = 0 \text{ kun } i \neq j.
\end{aligned}$$

Esittämällä differentiaalit $d\bar{x}^i$ differentiaalien dx^k avulla saadaan johdetuksi kantavektoreille käänteismuunnos

$$E_i = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\bar{E}_k.$$

Olkoon A jokin vektori, joka kontravarianttien komponenttien avulla kirjoitettuna on

$$A = a^i E_i.$$

Käyttäen hyväksi kantavektorien käänteismuunnoskaavaa saadaan

$$\begin{aligned}
A &= a^i E_i = a^i \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\bar{E}_k \\
&= \bar{a}^k \bar{E}_k,
\end{aligned}$$

eli vektorin kontravariantit komponentit transformoituvat kuten

$$\bar{a}^k = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}a^i.$$

Olkoon $\{E^i\}$ kantavektoreiden $\{E_i\}$ resiprokaalinen kantavektorijoukko, t.s. $E^i \cdot E_j = \delta^i_j$. Tarkastellaan vektoreita

$$C^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}E^k.$$

Nyt

$$\begin{aligned}
\bar{E}_i \cdot C^k &= \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}E_m \cdot \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l}E^l = \delta^l_m \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} \\
&= \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i} \\
&= \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial \bar{x}^i} = \delta^k_i,
\end{aligned}$$

joten vektorit C^i ovat resiprokaalisia vektoreille $\bar{E}_i$ eli ovat vektoreita $\bar{E}^i$. Saamme siis muunnoskaavan

$$\bar{E}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}E^k.$$

Vastaavasti resiprokaalisten kantavektoreiden käänteismuunnokselle saadaan

$$E^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\bar{E}^k.$$

Yhtälöstä

$$\begin{aligned}
A &= a_i E^i = a_i \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\bar{E}^k \\
&= \bar{a}_k \bar{E}^k
\end{aligned}$$

saadaan vektorin kovarianttien komponenttien muunnoskaavaksi

$$\bar{a}_k = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}a_i.$$

Näitä kontra- ja kovarianttien komponenttien transformaatiokaavoja käytetään monesti *1. kertaluvun tensorin määritelminä*: jos suureet $a^1, a^2, \ldots, a^N$ transformoituvat koordinaatiston muunnoksessa $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \ldots, x^N)$ kuten

$$\bar{a}^k = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}a^i,$$

niin ne muodostavat 1. kertaluvun kontravariantin tensorin. Vastaavaa määritelmää käytetään 1. kertaluvun kovariantille tensorille.
Korkeamman kertaluvun tensoreille saadaan muunnoskaavat analogisesti. Esim. metriselle perustensorille, samoin kuin mille tahansa 2. kertaluvun tensorin kovarianteille ja kontravarianteille komponenteille, on voimassa

$$\begin{aligned}
\bar{g}_{ik} &= \bar{E}_i \cdot \bar{E}_k = \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}E_m \cdot \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k}E_n \\
&= \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k}g_{mn}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\bar{g}^{ik} &= \bar{E}^i \cdot \bar{E}^k = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m}E^m \cdot \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^n}E^n \\
&= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^n}g^{mn}.
\end{aligned}$$

Vastaavasti sekakomponenttiset tensorit transformoituvat kuten

$$\begin{aligned}
\bar{t}^i{}_j &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j}t^m{}_n \\
\bar{t}_j{}^i &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j}t_n{}^m.
\end{aligned}$$

Jälleen näitä kaavoja voidaan pitää 2. kertaluvun tensorin määritelminä.
Tensorit, joiden kertaluku on suurempi kuin 2 määritellään analogisesti. Esim. suureet A^{ijk}_{lm} ovat 5. kertaluvun sekatensorin —kertalukua 3 kontravarianttien ja kertalukua 2 kovarianttien komponenttien suhteen– komponentit, jos ne transformoituvat kuten

$$\bar{A}^{pqr}_{st} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^s}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^t}A^{ijk}_{lm}.$$

5. Vektorien väliset tulot

Olkoot A ja B kaksi vektoria; komponenteittain kirjoitettuna:

$$\begin{aligned} A &= a^i E_i = a_i E^i \\ B &= b^i E_i = b_i E^i. \end{aligned}$$

1° **Skalaaritulo (sisätulo)**

Skalaaritulo $A \cdot B$ on määritelmänsä mukaan

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (a_i E^i) \cdot (b^k E_k) = a_i b^k \delta^i_k = a_i b^i \\ &= (a^i E_i) \cdot (b_k E^k) = a^i b_k \delta^k_i = a^i b_i \\ &= (a^i E_i) \cdot (b^k E_k) = g_{ik} a^i b^k \\ &= (a_i E^i) \cdot (b_k E^k) = g^{ik} a_i b_k. \end{aligned}$$

Skalaaritulo on invariantti, sillä

$$\begin{aligned} \bar{A} \cdot \bar{B} &= \bar{a}_i \bar{b}^i = \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} a_m \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^n} b^n \\ &= \frac{\partial x^m}{\partial x^n} a_m b^n = \delta^m_n a_m b^n = a_m b^m \\ &= A \cdot B. \end{aligned}$$

Vektorin A pituus L määritellään siten, että

$$L^2 = A \cdot A = a_i a^i = g_{ij} a^i a^j = g^{ij} a_i a_j.$$

Vektoreiden A ja B välinen kulma θ saadaan kaavasta

$$\cos\theta = \frac{A \cdot B}{\sqrt{A \cdot A\, B \cdot B}} = \frac{a_i b^i}{\sqrt{a_j a^j\, b_k b^k}}.$$

2° **Dyaditulo (ulkotulo)**

Vektoreiden A ja B välinen ulkotulo AB on

$$\begin{aligned} AB &= (a_i E^i)(b_k E^k) = a_i b_k E^i E^k \\ &= a^i b^k E_i E_k = a^i b_k E_i E^k = a_i b^k E^i E_k. \end{aligned}$$

Dyaditulon komponentit ovat

$$\begin{aligned} t_{lm} &\equiv (AB)_{lm} = E_l \cdot AB \cdot E_m = \delta^i_l \delta^k_m a_i b_k = a_l b_m \\ t^{lm} &\equiv (AB)^{lm} = E^l \cdot AB \cdot E^m = a^l b^m \\ t^l{}_m &\equiv (AB)^l{}_m = E^l \cdot AB \cdot E_m = a^l b_m \\ t_m{}^l &\equiv (AB)_m{}^l = E_m \cdot AB \cdot E^l = a_m b^l. \end{aligned}$$

Toisen kertaluvun tensori voidaan esittää dyaditulona.

3° **Kolmiulotteisten vektorien ristitulo**

Merkitään symbolilla g determinanttia

$$g = \det(g_{ij}).$$

Kolmiulotteisille vektoreille A ja B voidaan määritellä ristitulo $A \times B$ siten, että

$$\begin{aligned} A \times B &= \sqrt{g} \begin{vmatrix} E^1 & E^2 & E^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} \sqrt{g} E^i a^j b^k \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \frac{\epsilon_{ijk}}{\sqrt{g}} E_i a_j b_k. \end{aligned}$$

Ortogonaalisuusrelaatiota $E_i \cdot E^n = \delta^n_i$ käyttäen saadaan ristitulon komponenteiksi

$$\begin{aligned} (A \times B)^n &= (A \times B) \cdot E^n = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon_{ijk} E_i \cdot E^n a_j b_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon_{njk} a_j b_k \\ (A \times B)_n &= (A \times B) \cdot E_n = \sqrt{g} \epsilon_{ijk} E^i \cdot E_n a^j b^k \\ &= \sqrt{g} \epsilon_{njk} a^j b^k. \end{aligned}$$

6. Sovellutuksia

1° **Pintaelementti ja pinta-ala**

Tarkastellaan kolmiulotteisessa avaruudessa (x^1, x^2, x^3) koordinaattipinnan $x^3 = c^3$ pinta-alkiota da_{12}. Tällä pinnalla koordinaattikäyrien suuntaiset differentiaaliset viivaelementit ovat

$$\begin{aligned} ds_1 &= E_1 dx^1 \\ ds_2 &= E_2 dx^2. \end{aligned}$$

Näiden vektorien väliin jäävän suunnikkaan pinta-ala da_{12} on

$$da_{12} = |ds_1 \times ds_2| = |E_1 \times E_2| dx^1 dx^2.$$

Kantavektorin E_1 kontravariantit komponentit e^i ovat ilmeisestikin δ^i_1, sillä

$$E_1 = 1\, E_1 = e^i E_i.$$

Samoin kantavektorin E_2 kontravariantit komponentit ovat δ^i_2.
Tällöin

$$E_1 \times E_2 = \sqrt{g} \begin{vmatrix} E^1 & E^2 & E^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \sqrt{g} E^3,$$

joten

$$|E_1 \times E_2|^2 = \sqrt{g} E^3 \cdot \sqrt{g} E^3 = g g^{33}.$$

Pinta-alkioksi da_{12} saadaan siis

$$da_{12} = \sqrt{g g^{33}} dx^1 dx^2.$$

Vastaavasti pintaelementit muilla koordinaattipinnoilla ovat

$$\begin{aligned} da_{23} &= \sqrt{g g^{11}} dx^2 dx^3 \\ da_{31} &= \sqrt{g g^{22}} dx^3 dx^1. \end{aligned}$$

Esim. Sylinterikoordinaatisto: $x^1 = \rho$, $x^2 = \phi$ ja $x^3 = z$. Viivaelementin neliöstä

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2$$

voidaan lukea tensorin g_{ij} kovarianteiksi komponenteiksi

$$g_{11} = 1;\ g_{22} = \rho^2;\ g_{33} = 1;\ g_{ij} = 0,\ \text{kun } i \neq j.$$

Sylinterikoordinaatisto on siis ortogonaalinen ja metrisen perustensorin kontravariantit komponentit ovat $g^{ii} = 1/g_{ii}$:

$$g^{11} = 1;\ g^{22} = \frac{1}{\rho^2};\ g^{33} = 1.$$

Determinantiksi $g = \det(g_{ij})$ saadaan $g = \rho^2$. Koordinaattipinnalla $z =$ vakio pintaelementti on siis

$$da_{12} = \sqrt{gg^{33}}dx^1 dx^2 = \rho\, d\rho\, d\phi.$$

Koordinaattipinnalla $\rho =$ vakio pintaelementti on

$$da_{23} = \sqrt{gg^{11}}dx^2 dx^3 = \rho\, d\phi\, dz,$$

ja pinnalla $\phi =$ vakio

$$da_{31} = \sqrt{gg^{22}}dx^3 dx^1 = d\rho\, dz.$$

r-säteisen sylinterin pohjan pinta-ala on

$$\begin{aligned} A_{\text{pohja}} &= \iint\limits_{\text{pohja}} da_{12} = \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho\, d\rho\, d\phi \\ &= 2\pi \Big/_{0}^{r} \frac{\rho^2}{2} = \pi r^2. \end{aligned}$$

Vastaavan z-korkeuksisen sylinterin vaipan pinta-ala on

$$\begin{aligned} A_{\text{vaippa}} &= \iint\limits_{\text{vaippa}} da_{23} = \int_0^z \int_0^{2\pi} \rho\, d\phi\, dz \\ &= 2\pi r z, \end{aligned}$$

sillä vaipalla $\rho = r$. z-akselin kautta kulkevan leikkaustason pinta-ala on

$$\begin{aligned} A_{\text{leikkaustaso}} &= \iint\limits_{\text{leikkaustaso}} da_{31} = 2\int_0^z \int_0^r d\rho\, dz \\ &= 2rz. \end{aligned}$$

2° **Tilavuusalkio**

Tarkastellaan edelleen kolmiulotteista avaruutta. Differentiaalisten vektoreiden

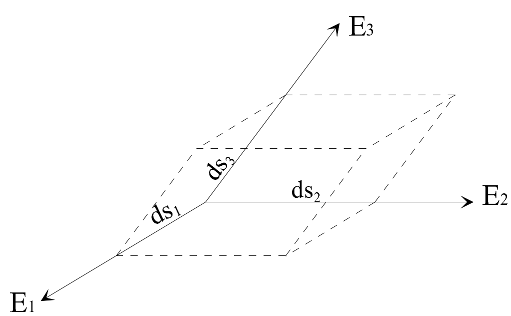
$$ds_1 = dx^1 E_1,\ ds_2 = dx^2 E_2,\ ds_3 = dx^3 E_3$$

väliin jäävän suuntaissärmiön tilavuus dV on

$$\begin{aligned} dV &= (ds_1 \times ds_2)\cdot ds_3 = (E_1 \times E_2)\cdot E_3 dx^1 dx^2 dx^3 \\ &= \sqrt{g}E^3 \cdot E_3 dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{g}dx^1 dx^2 dx^3, \end{aligned}$$

eli kolmiulotteisen avaruuden tilavuuselementti on

$$dV = \sqrt{g}dx^1 dx^2 dx^3.$$



Kuva 6.1: Tilavuuelementti.

Esim. Pallon tilavuus. Pallokoordinaatistossa $x^1 = r; x^2 = \theta; x^3 = \phi$ viivaelementin neliö on

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2,$$

josta lukemalla saadaan metrisen perustensorin komponenteiksi

$$g_{11} = 1;\ g_{22} = r^2;\ g_{33} = r^2 \sin^2\theta$$

muiden komponenttien ollessa nollia. Determinantti g on siis

$$g = r^4 \sin^2\theta$$

ja tilavuuselementti

$$dV = \sqrt{g}dx^1 dx^2 dx^3 = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi.$$

R-säteisen pallon tilavuus V on siis

$$\begin{aligned} V &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{g}\, dr\, d\theta\, d\phi \\ &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi \\ &= 2\pi \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi d(-\cos\theta) = \frac{4\pi}{3}R^3. \end{aligned}$$

3° **Geodesiaa**

Tarkastellaan N-ulotteisen avaruuden käyrää

$$x^i = x^i(t).$$

Viivaelementin neliö

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

pitkin tätä käyrää saadaan laskemalla differentiaalit dx^i tällä käyrällä:

$$dx^i = \frac{dx^i}{dt}dt.$$

Merkitään lyhyyden vuoksi parametrin t suhteen laskettuja derivaattoja yläpisteellä $\dot{}$, t.s.

$$\frac{dx^i}{dt} = \dot{x}^i.$$

Käyrällä laskettu viivaelementin neliö on niin ollen

$$ds^2 = g_{ij}\dot{x}^i \dot{x}^j dt^2,$$

ja pisteiden $x^i(t_1)$ ja $x^i(t_2)$ välinen etäisyys s pitkin tätä käyrää

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}\, dt. \tag{1}$$

Sellaista käyrää, jota pitkin mitattu kahden pisteen välinen etäisyys on minimissään, sanotaan *geodeettiseksi käyräksi*.

Osoitetaan, että *välttämätön ehto sille, että integraalilla*

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x})dt \tag{2}$$

on ääriarvo (minimi tai maksimi), on

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0.$$

Olkoon $x = X(t), t_1 \le t \le t_2$ se käyrä, jolla integraalilla (2) on ääriarvonsa. Olkoon käyrä $x = X(t) + \epsilon\eta(t)$ jokin tämän käyrän läheisyydessä kulkeva käyrä. Oletetaan, että näiden käyrien päätepisteet yhtyvät, t.s. $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$. Kyseistä naapurikäyrää myöten laskettu integraali (2) on

$$I(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, X + \epsilon\eta, \dot{X} + \epsilon\dot{\eta})dt.$$

Oletuksen mukaan tällä on ääriarvo, kun $\epsilon = 0$. Tunnetusti välttämätön ehto ääriarvolle on, että

$$\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0.$$

Derivoimalla integraalin sisällä (olettaen, että se on sallittua) saadaan ehdoksi

$$\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\eta + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}\right) dt = 0.$$

Osittain integroimalla saadaan jälkimmäisestä termistä

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}\, dt &= \Big/_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\eta - \int_{t_1}^{t_2} \eta \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) dt \\ &= -\int_{t_1}^{t_2} \eta \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) dt.\end{aligned}$$

Ääriarvoehto saadaan siis muotoon

$$\int_{t_1}^{t_2} \eta \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right) dt = 0.$$

Koska funktio η oli mielivaltainen, täytyy olla voimassa

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0.$$

Tämä *Euler-Lagrangen yhtälönä* tunnettu ehto voidaan helposti yleistää koskemaan myös integraaleja

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x^1, \dot{x}^1, x^2, \dot{x}^2, \ldots, x^N, \dot{x}^N)dt.$$

Euler-Lagrangen yhtälöitä saadaan nyt N kappaletta:

$$\frac{\partial F}{\partial x^k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k}\right) = 0.$$

Etsitään yhtälö geodeettiselle käyrälle, t.s. käyrälle, joka minimoi etäisyyden (1):

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}\, dt.$$

Sovelletaan Euler-Lagrangen yhtälöitä. Merkitään

$$F = \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}.$$

Euler-Lagrangen yhtälöissä esiintyvät osittaisdervaatat ovat tällöin

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x^k} &= \frac{1}{2\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k}\dot{x}^l\dot{x}^m \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} &= \frac{1}{2\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}}2g_{lk}\dot{x}^l.\end{aligned}$$

Koska

$$\dot{s} \equiv \frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}$$

voidaan ääriarvoehdot (Euler-Lagrangen yhtälöt) kirjoittaa muotoon

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{g_{ik}\dot{x}^i}{\dot{s}}\right) - \frac{1}{2\dot{s}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0.$$

Nyt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{g_{ik}\dot{x}^i}{\dot{s}}\right) = \frac{1}{\dot{s}}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^j\dot{x}^i + \frac{1}{\dot{s}}g_{ik}\ddot{x}^i - \frac{1}{\dot{s}^2}g_{ik}\dot{x}^i\ddot{s},$$

joten ääriarvoehto saadaan muotoon

$$g_{ik}\ddot{x}^i + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{g_{ik}\dot{x}^i\ddot{s}}{\dot{s}}.$$

Vaihtamalla summausindeksejä $(i \leftrightarrow j)$ nähdään, että

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j,$$

joten voidaan kirjoittaa

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j.$$

Ääriarvoehto kuuluu nyt

$$g_{ik}\ddot{x}^i + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{g_{ik}\dot{x}^i\ddot{s}}{\dot{s}}.$$

Tässä yhtälössä esiintyvää lauseketta

$$[ij,k] \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

sanotaan *1. lajin Christoffelin symboliksi*. Sen avulla ääriarvoehto saadaan muotoon

$$g_{ik}\ddot{x}^i + [ij,k]\dot{x}^i\dot{x}^k = \frac{g_{ik}\dot{x}^i\ddot{s}}{\dot{s}}.$$

Otetaan parametriksi t käyrän pituus s, eli $t = s$. Tällöin $\dot{s} = 1$ ja $\ddot{s} = 0$, joten geodeettisen käyrän yhtälö on muotoa

$$g_{ik}\frac{d^2x^i}{ds^2} + [ij,k]\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0.$$

Kertomalla suureella g^{lk}, summaamalla yli indeksin k, ja muistaen että

$$g^{lk}g_{ik} = \delta^l_i,$$

saadaan

$$\frac{d^2x^l}{ds^2} + g^{lk}[ij,k]\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0.$$

Tässä esiintyvä suure

$$\left\{ \begin{array}{c} l \\ ij \end{array} \right\} \equiv g^{lk}[ij,k] = \frac{1}{2}g^{lk}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

tunnetaan *2. lajin Christoffelin symbolina*. Tämän avulla geodeettisen käyrän yhtälö saadaan kompaktiin muotoon

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} + \left\{ \begin{array}{c} k \\ ij \end{array} \right\} \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0.$$